

具有年龄结构的食蚜蝇-蚜虫捕食模型

霍丽慧¹, 赵惠燕^{2,*}, 郑立飞¹, 吴养会¹

(1. 西北农林科技大学理学院, 陕西 杨凌 712100; 2. 西北农林科技大学植物保护学院, 陕西 杨凌 712100)

摘要: 现有的具有年龄结构的捕食-食饵模型总是假设只有成年捕食者捕食猎物, 这与实际情况不符。建立了一个幼年捕食者捕食食饵的具有年龄结构的食蚜蝇-蚜虫模型, 应用微分方程定性理论, 讨论了系统平衡点及其稳定性: 其中平衡点 $E_1(0,0,0)$ 为不稳定的; 满足一定条件时, 边界平衡点 $E_2(K,0,0)$ 及正平衡点 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 为局部渐近稳定的; 且应用一致持续生存理论得到了系统永久持续生存的条件, 为有害生物综合治理提供了理论依据。

关键词: 持续生存; 稳定性; 年龄结构; 种群

Analysis of a syrphid fly-aphid system with age structure

HUO Lihui¹, ZHAO Huiyan^{2,*}, ZHENG Lifei¹, WU Yanghui¹

1 College of Science, Northwest A & F University, Yangling Shaanxi, 712100, China

2 College of Plant Protection, Northwest A & F University, Yangling Shaanxi, 712100, China

Abstract: Predator-prey is one of the most prevalent interactions among species in the nature. Because their biological characteristics of each age are different, it is of very important theoretical significance and practical value to take into account the population models with age structure. However, the existing predator prey models with age structure always assume that only mature predators catch prey. This is inconsistent with observed fact. In this paper we establish a syrphid fly-aphid model with age structure based on the biological characteristics of the predatory syrphid fly. In our model, only the immature predators can catch prey. We also explain the insect population dynamics by a mathematical analysis of the models, in order to provide a theoretical basis for Integrated Pest Management.

First of all, according to the given initial conditions and characteristics of the system, we have proven that the solutions of the system are always positive and bounded. This is consistent with the ecological significance of the system.

Secondly, we get three equilibrium points of the system when we suppose the right-hand side is zero. We analyze these equilibrium points and the stability of the system based on the stability theory of differential equations. The results show that one equilibrium point $E_1(0,0,0)$ is unstable, and the boundary equilibrium point $E_2(K,0,0)$ is locally asymptotically stable under certain conditions. With time increasing at the boundary equilibrium point, aphid populations tend to survive and achieve the maximum capacity, while the syrphid fly species will get extinct, that would be the outbreak of the pest populations which should be prevented. The results also indicate that the positive equilibrium point $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ is locally asymptotically stable under certain conditions. With time increasing at this point, both the aphid and syrphid fly populations will tend to survive and approach a positive equilibrium $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$. At this point we can also get the ratio of natural enemies by the pest, which can help control the pest population to reach the positive equilibrium point so as to prevent the outbreak of the pest population.

Finally, we get the criterion for the permanence of populations using uniform persistence theory. Under the condition, both the predator and the prey populations will not be survive. Given certain corresponding parameters, we can draw some results of the system with numerical simulation analysis.

基金项目: 国家自然科学基金项目(30470268/C0111); 陕西省科委重点项目(2001SM01)

收稿日期: 2009-09-23; **修订日期:** 2010-03-09

* 通讯作者 Corresponding author. E-mail: zhaohy1983@yahoo.com.cn

Syrphidae insects include saprophagous and phytophagous. This paper only researches the predatory syrphid fly and aphids with predator-prey relationship. Because the Aphids are r-strategy users, the model in our research can be extended for application in the syrphid fly-aphids system.

To sum up, based on the biological characteristics of the predatory syrphid fly, in this article we establish a syrphid fly-aphid system with age structure, in which only immature predators catch prey. Through mathematical analysis, we discuss the equilibrium points and stability of the system, and build a criterion for the permanence of populations. We can explain the insect population dynamics by these results. All of these results provide a foundation for Integrated Pest Management.

Key Words: permanence; stability; age structure; population

捕食-被捕食是自然界中普遍存在的物种间相互作用的基本关系之一。20 世纪 20 年代, Lotka 和 Volterra 运用动力学方法各自独立提出了 Lotka-Volterra 模型。尽管该模型应用广泛, 却存在明显的不合理之处, 如其并未考虑物种各个年龄阶段的不同生物学特征。比如完全变态昆虫生长发育过程就有卵, 幼虫, 蛹, 成虫 4 个阶段, 各阶段都表现出不同的特征。另外, 成年与幼年群体间还有相互作用的功能, 这些都不同程度地影响生物种群的持续生存与绝灭。因此, 考虑具有年龄结构的种群模型具有非常重要的理论意义和实践价值。

到目前为止的年龄结构模型研究中^[1-10], 始终假设幼年捕食者不捕食猎物, 而现实世界中许多捕食者尤其是天敌昆虫的幼虫是捕食猎物的, 有的甚至超过成虫, 如瓢虫高龄幼虫。也有的如食蚜蝇只是幼虫捕食猎物——蚜虫, 而成虫不捕食^[11], 同时成年食蚜蝇的种群大小又会影响到幼龄食蚜蝇的种群大小。建立一个考虑幼年捕食者捕食猎物的年龄结构模型, 通过模型解释昆虫种群动态, 为有害生物综合治理提供理论依据正是本研究的目的。

1 模型

考虑如下的幼年捕食者捕食食饵的具有年龄结构的食蚜蝇-蚜虫模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{ax(t)y_1(t)}{1 + bx(t)} \\ \dot{y}_1(t) = -d_1y_1(t) + \frac{cx(t)y_1(t)}{1 + bx(t)} + ey_2(t) - dy_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = -d_2y_2(t) + kdy_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x(t)$ 表示食饵即蚜虫种群在时刻 t 的密度, 捕食者种群分为两个年龄阶段, $y_1(t)$, $y_2(t)$ 分别表示幼年和成年食蚜蝇在时刻 t 的密度, 这里考虑蚜虫是符合 logistic 增长规律的, r 为蚜虫种群的内在增长率, K 为环境容纳量, $\frac{ax(t)y_1(t)}{1 + bx(t)}$ 项表明捕食功能反应为 Holling II 型, $\frac{cx(t)y_1(t)}{1 + bx(t)}$ 表示捕食者的数量反应, 其中 $c = ma$, m 为消化系数。 d_1, d_2 分别为幼年和成年食蚜蝇的死亡率, e 为成年食蚜蝇的繁殖率, d 为幼年食蚜蝇转化为成年的转化率, k 为转化的成功率, 这里假设成年食蚜蝇繁殖与自身密度成正比, 幼年食蚜蝇转化亦与其自身密度成正比。其中参数 $r, a, b, c, d, e, K, d_1, d_2, k$ 均为正常数。根据系统 (1) 的生态意义, 本文讨论系统满足初始条件: $x(t_0) > 0, y_1(t_0) > 0, y_2(t_0) > 0$ 。

2 系统解的正性及有界性

在满足初始条件时, 可以证明系统 (1) 的解是恒正的, 而这也是符合系统的生态意义的。

定理 2.1 系统 (1) 的解是恒正的, 且当 $0 < d + d_1 - \frac{dek}{d_2}$ 时, 存在正数 M , 使得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M, \limsup_{t \rightarrow \infty} y_i(t) \leq M, i = 1, 2$, 即系统 (1) 的解是最终有界的。

证明: 首先证明解的恒正性。对于初始条件 $x(t_0) > 0, y_1(t_0) > 0, y_2(t_0) > 0$, 由系统 (1) 的第一个方程可

以解得 $x(t) = x(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^t r\left(1 - \frac{x(s)}{K}\right) - \frac{ay_1(s)}{1 + bx(s)} ds\right]$, 显然 $x(t) > 0$ 。

下证 $y_i(t) > 0, i = 1, 2$ 。根据系统(1)有,

$$\dot{y}_1(t) \Big|_{y_1(t)=0} = ey_2(t) > 0, \text{ 如果 } y_2(t) > 0; \dot{y}_2(t) \Big|_{y_2(t)=0} = kdy_1(t) > 0, \text{ 如果 } y_1(t) > 0;$$

又系统满足初始条件 $y_1(t_0) > 0, y_2(t_0) > 0$, 故 $y_i(t) > 0, i = 1, 2$, 即系统(1)的解恒正。

以下证明解的最终有界性。由系统(1)的第一个方程知 $\dot{x} \leq rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, 根据比较定理可得, $x(t) \leq K + \frac{K}{e^{rt} - 1}$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $K + \frac{K}{e^{rt} - 1} \rightarrow K$, 所以存在 $T > 0$ 和正数 M_1 , 使得当 $t > T$ 时, $x(t) \leq M_1$, 也即 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1$, 故 $x(t)$ 为最终有界的。

$$\text{令 } V = mx + m_1y_1 + m_2y_2, \text{ 其中取 } m = \frac{1}{r}, m_1 = \frac{a}{rc}, \frac{ae}{crd_2} < m_2 < \frac{a(d+d_1)}{crdk}$$

$$\text{则 } V' \leq x + [m_2kd - \frac{a}{cr}(d+d_1)]y_1 + \left(\frac{ae}{cr} - m_2d_2\right)y_2$$

$$\text{取 } m_3 = \min\left(m_2d_2 - \frac{ae}{cr}, \frac{a}{cr}(d+d_1) - m_2kd\right), \text{ 则 } V' \leq -m_3V + (1+m_3)x$$

根据比较定理, 当 $t > T$ 时, $V \leq V(T)e^{-m_3(t-T)} + (1+m_3)M_1 \int_T^t e^{m_3(s-t)} ds \rightarrow \frac{M_1(1+m_3)}{m_3}$, 所以存在 $T_1 > 0$ 和正数 M_2 , 使得当 $t > T_1$ 时, $V \leq M_2$ 。令 $M = \max(M_1, M_2)$, 则 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M, \limsup_{t \rightarrow \infty} y_i(t) \leq M, i = 1, 2$, 即系统(1)的解是最终有界的。

3 平衡点及稳定性

令系统(1)右端项为零, 容易求得系统总有边界平衡点 $E_1(0, 0, 0), E_2(K, 0, 0)$ 。若令 $A = d + d_1 - \frac{dek}{d_2}$, 则当 $0 < A < \frac{cK}{bK+1}$ 时, 存在唯一正平衡点 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$, 其中, $x^* = \frac{A}{c-bA}, y_1^* = \frac{r}{a}(1+bx^*)(1-\frac{x^*}{k}), y_2^* = \frac{kd}{d_2}y_1^*$, 此时可以得到正平衡点处的益害比为 $(y_1^* + y_2^*) : x^*$ 。

定理 3.1 平衡点 E_1 为不稳定的。

证明 平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -d-d_1 & e \\ 0 & kd & -d_2 \end{pmatrix}$$

其特征方程为 $(r-\lambda)[(-d-d_1-\lambda)(-d_2-\lambda)-kde] = 0$, 有正根 $\lambda = r$, 故不稳定。

定理 3.2 当 $A > \frac{cK}{1+bK}$ 时, 边界平衡点 E_2 局部渐近稳定; 反之, 当 $A < \frac{cK}{1+bK}$ 时, E_2 不稳定。

证明 平衡点 $E_2(K, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -r & -\frac{aK}{1+bK} & 0 \\ 0 & -d-d_1 + \frac{cK}{1+bK} & e \\ 0 & kd & -d_2 \end{pmatrix}$$

其特征方程为 $(\lambda+r)[(-d-d_1 + \frac{cK}{1+bK} - \lambda)(-d_2 - \lambda) - kde] = 0$

由此得, $\lambda + r = 0$

$$\lambda^2 + (d + d_1 + d_2 - \frac{cK}{1 + bK})\lambda + d_2(d + d_1 - \frac{cK}{1 + bK}) - kde = 0 \quad (2)$$

设方程(2)的根分别为 λ_1, λ_2 , 则:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(d + d_1 + d_2 - \frac{cK}{1 + bK}), \lambda_1 \cdot \lambda_2 = d_2(d + d_1 - \frac{cK}{1 + bK}) - kde$$

当 $A < \frac{cK}{1 + bK}$ 时, $d_2(d + d_1 - \frac{cK}{1 + bK}) - kde < 0$, 所以 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, 存在正特征根, 故平衡点不稳定。

当 $A > \frac{cK}{1 + bK}$ 时, $d_2(d + d_1 - \frac{cK}{1 + bK}) - kde > 0$, 所以 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 < 0$, 故 λ_1, λ_2 均为负的, 此时平衡点为局部渐近稳定的, 故得证。

正平衡点 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 的 Jacobian 矩阵为:

$$J_{E_3} = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{ay_1^*(1 + bx^*) - bax^*y_1^*}{(1 + bx^*)^2} & -\frac{ax^*}{1 + bx^*} & 0 \\ \frac{cy_1(1 + bx^*) - bcx^*y_1^*}{(1 + bx^*)^2} & -d - d_1 + \frac{cx^*}{1 + bx^*} & e \\ 0 & kd & -d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } a_1 = r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{rx^*}{K} - \frac{r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)}{1 + bx^*}, a_2 = \frac{ax^*}{1 + bx^*}, a_3 = \frac{c}{a}r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right), a_4 = -d - d_1 + \frac{cx^*}{1 + bx^*}$$

则特征方程为 $\lambda^3 + (-a_1 - a_4 + d_2)\lambda^2 + (a_2a_3 + a_1a_4 - a_1d_2)\lambda + a_2a_3d_2 = 0$

定理 3.3 当 $\max\left\{\frac{c(bK-1)}{b(bK+1)}, 0\right\} < A < \frac{cK}{1 + bK}$ 时, 正平衡点 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明 在特征方程 $\lambda^3 + (-a_1 - a_4 + d_2)\lambda^2 + (a_2a_3 + a_1a_4 - a_1d_2)\lambda + a_2a_3d_2 = 0$ 中,

若令 $q_1 = -a_1 - a_4 + d_2, q_2 = a_2a_3 + a_1a_4 - a_1d_2, q_3 = a_2a_3d_2$

则由 Routh-Hurwitz 准则知, 当 $q_1 > 0, q_3 > 0, q_1q_2 - q_3 > 0$ 时, 特征方程的一切根有负实部, 此时 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 为局部渐近稳定的。以下证明 $q_1 > 0, q_3 > 0, q_1q_2 - q_3 > 0$ 。

当 $\max\left\{\frac{c(bK-1)}{b(bK+1)}, 0\right\} < A < \frac{cK}{1 + bK}$ 时, 首先正平衡点是存在的, 并且由 $\frac{c(bK-1)}{b(bK+1)} < A$ 知, $a_1 = r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) -$

$$\frac{rx^*}{K} - \frac{r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right)}{1 + bx^*} = \frac{rbA}{c} + \frac{rA}{cK} - \frac{2rA}{K(c - bA)} < 0, \text{ 又 } a_4 = -d - d_1 + \frac{cx^*}{1 + bx^*} = -\frac{dek}{d_2} < 0, \text{ 所以 } q_1 = -a_1 - a_4 + d_2 > 0;$$

因为 $a_2 = \frac{ax^*}{1 + bx^*} > 0, a_3 = \frac{c}{a}r\left(1 - \frac{x^*}{K}\right) > 0$, 所以 $q_3 = a_2a_3d_2 > 0; q_1q_2 - q_3 = -a_2a_3(a_1 + a_4) - a_1(a_4 - d_2)(a_1 + a_4 - d_2) > 0$, 则定理得证。

4 永久持续生存

定义 4.1^[13] 系统(1)被称为永久持续生存的, 若存在紧域 $\Omega \subset \text{Int}R_+^3$, 使得该系统中的每一个解最终进入并保持在此域中。

从生态意义上讲, 系统永久持续生存, 即系统中的种群密度对于任何的初始状态均将进入一个有正的上限和下限的区域, 并保持在此区域中。此时, 种群不会灭绝, 持续生存。

为研究系统的永久持续生存, 引入下面的系统持续性理论。

设 X 为一完备的度量空间, 假设 $X^0 \in X, X_0 \in X, X^0 \cap X_0 = \emptyset$, 且 X 上的 C^0 -半群 $T(t)$ 满足, $T(t): X^0 \rightarrow X^0, T(t): X_0 \rightarrow X_0$ 。记 $T_0(t) = T(t)|_{X_0}, A_0$ 是 $T_0(t)$ 的全局吸引子。

引理 4.1^[1,14] 设 $T(t)$ 满足上述条件,且满足:

(i) 存在 $t_0 \geq 0$ 使得对一切 $t > t_0, T(t)$ 均为紧的;

(ii) $T(t)$ 在集合 X 为点扩散的;

(iii) $\tilde{A}_\phi = \bigcup_{x \in A_\phi} \omega(x)$ 为孤立集且有一个非循环覆盖 M 。

(iv) $W^s(M_i) \cap X^0 = \emptyset$ 对任意 $M_i \in M$ 均成立。

则 X_0 一致排斥 X^0 , 即存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意的 $x \in X^0, \liminf_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, X_0) \geq \varepsilon$, 其中 d 是 $T(t)x$ 到集合 X_0 的距离。

定理 4.1 当 $0 < A < \frac{cK}{bK+1}$ 时, 系统是永久持续生存的。

证明 由前面的证明知系统的解是恒正且最终有界的, 故只需证明系统(1)是一致持续生存的即可。

取 $C_1 = \{(x, y_1, y_2) \mid x(t) \equiv 0, y_i \geq 0, i = 1, 2\}, C_2 = \{(x, y_1, y_2) \mid x(t) \geq 0, y_i \equiv 0, i = 1, 2\}, X_0 = C_1 \cup C_2$, 令 $X = \mathbb{R}^3_+, X^0 = \text{Int}\mathbb{R}^3_+$, 则 $X^0 \cap X_0 = \emptyset$, 由定理 2.1 知 X^0 是正不变的, 且易证 X_0 也是正不变的。又由 X^0 和 X_0 的定义及定理 2.1 知系统满足引理 4.1 的条件(i)(ii), 下证条件(iii)(iv)也满足。

显然系统(1)在 X_0 上有两个常数解 $E_1 \in C_1, E_2 \in C_2$ 。

因为 $\dot{x}(t) \mid_{(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in C_1} \equiv 0, \dot{y}_i(t) \mid_{(x(t), y_1(t), y_2(t)) \in C_1} \leq 0, i = 1, 2$, 所以 $y_i \rightarrow 0, i = 1, 2$, 即 C_1 中的点均趋近于 E_1 。同理可证 C_2 中的点均趋近于 E_2 。

由上知若 E_1, E_2 孤立, 则 $\{E_1, E_2\}$ 为孤立的且为非循环覆盖。要证 E_1, E_2 孤立, 只需 $W^s(E_1) \cap X^0 = \emptyset$, 和 $W^s(E_2) \cap X^0 = \emptyset$ 。

对于 $W^s(E_1) \cap X^0 = \emptyset$ 。反证若 $W^s(E_1) \cap X^0 \neq \emptyset$ 不成立, 则 $t \rightarrow \infty$ 时, 存在正解 $(x, y_1, y_2) \rightarrow 0$, 故由 $\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{axy_1}{1+bx}$ 知 $\frac{d \ln x}{dt} = r(1 - \frac{x}{k}) - \frac{ay_1}{1+bx} \rightarrow r$, 所以 $\frac{d \ln x}{dt} > 0$, 即 $\ln x \rightarrow \infty$, 所以 $x \rightarrow \infty$, 矛盾, 故 $W^s(E_1) \cap X^0 = \emptyset$ 成立。

对于 $W^s(E_2) \cap X^0 = \emptyset$, 亦用反证法。若 $W^s(E_2) \cap X^0 \neq \emptyset$ 不成立, 即存在正解 $(x^0, y_1^0, y_2^0) \rightarrow (K, 0, 0)$ 。取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $A < \frac{c(K-\varepsilon)}{1+b(K+\varepsilon)}$, 又存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时, $K - \varepsilon < x^0(t) < K + \varepsilon$ 。则有

$$\begin{cases} \dot{y}_1^0 \geq ey_2^0 - d_1 y_1^0 - dy_1^0 + \frac{c(K-\varepsilon)y_1^0}{1+b(K+\varepsilon)} \\ \dot{y}_2^0 = -d_2 y_2^0 + k d y_1^0 \end{cases}$$

考虑比较方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ey_2 - d_1 y_1 - dy_1 + \frac{c(K-\varepsilon)y_1}{1+b(K+\varepsilon)} \\ \dot{y}_2 = -d_2 y_2 + k d y_1 \end{cases} \quad (3)$$

取

$$B_\varepsilon = \begin{pmatrix} -d - d_1 + \frac{c(K-\varepsilon)}{1+b(K+\varepsilon)} & e \\ kd & -d_2 \end{pmatrix}$$

由 Perron-Frobenius 定理, 因为 B_ε 的非对角元素是正的, 所以 B_ε 的最大特征根 λ 的特征向量 u 是正的, 且计算得其最大特征根是正的。设 $(y_1(t), y_2(t))$ 为系统(3)的一个满足初始条件 $y_i(0) = u_i > 0, i = 1, 2$ 的解, 因为系统(3)的半流是单调的, 且有 $B_\varepsilon u > 0$, 所以 $y_i(t)$ 是单调增的^[15], 即 $y_i(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$, 又由比较定理知 $y_i^0(t) \geq y_i(t)$, 故 $y_i^0(t) \rightarrow +\infty, i = 1, 2$, 与定理 2.1 矛盾。所以, $W^s(E_2) \cap X^0 = \emptyset$ 。

则由引理 4.1 知 X_0 一致排斥系统(1)的正解, 即存在 $c_1 > 0$, 使得对系统(1)的任意解满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq c_1$, 且在集合 $U_1 = \{(x, y_1, y_2) \mid x > 0, 0 < y_1 \leq c_1, 0 < y_2 \leq c_1\}$ 的外部。

取 $0 < c_2 < \min\{c_1, \frac{kdc_1}{2d_2}\}$, 则在 $U_2 = \{(x, y_1, y_2) \mid x > 0, c_1 \leq y_1, 0 < y_2 \leq c_2\}$ 上 $y'_2 \geq \frac{kdc_1}{2d_2}$, 从而 $y_2 \rightarrow \infty$, 矛盾。所以系统(1)的任意正解最终离开 U_2 而在 U_2 的外部, 也即 $\liminf_{t \rightarrow \infty} y_2 \geq c_2$ 。

因为 $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq c_1, \liminf_{t \rightarrow \infty} y_2(t) \geq c_2$, 则当 t 充分大时有 $y'_1 \geq ec_2 - (d + d_1 - \frac{cc_1}{1 + bc_1})y_1$, 其中 $d + d_1 - \frac{cc_1}{1 + bc_1} > 0$, 否则 $y'_1 \geq ec_2 > 0$, 从而 $y_1 \rightarrow \infty$, 矛盾。解得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} y_1(t) \geq \frac{ec_2}{2(d + d_1 - \frac{cc_1}{1 + bc_1})}$, 因此系统(1)是一致持

续生存的, 则定理 4.1 得证。

5 结论与讨论

本文研究了一类具有年龄结构的食蚜蝇-蚜虫模型, 应用微分方程定性理论, 讨论了系统平衡点及其稳定性, 其中平衡点 $E_1(0, 0, 0)$ 为不稳定的; 当 $A > \frac{cK}{1 + bK}$ 时, 边界平衡点 $E_2(K, 0, 0)$ 为局部渐近稳定的, 此时随着时间的增加, 蚜虫种群将幸存并趋于环境容纳量 K , 而食蚜蝇种群将灭绝, 也即害虫种群将会爆发; 当 $\frac{c(bK - 1)}{b(bK + 1)} < A < \frac{cK}{1 + bK}$ 时, 正平衡点 $E_3(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 为局部渐近稳定的, 此时随着时间的增加, 蚜虫和食蚜蝇种群均存活并趋于平衡态 (x^*, y_1^*, y_2^*) , 这时还可得到天敌和害虫的益害比 $(y_1^* + y_2^*) : x^*$, 利用此比例可以将害虫种群控制在平衡点附近, 防止害虫种群的大爆发。应用一致持续生存理论得到了当 $0 < A < \frac{cK}{bK + 1}$ 时, 系统是永久持续生存的。

食蚜蝇科昆虫既有腐食性种类、又有植食类, 本研究仅以捕食与被捕食二重关系的食蚜蝇与蚜虫进行研究。由于蚜虫类都属于 r 对策者, 因此该模型应该适应于食蚜蝇与蚜虫类二重系统。而食蚜蝇科昆虫的其他不具备捕食与被捕食关系的种类(如食蚜蝇腐食性种类、植食性种类)有待于进一步研究。

另外, 通过给定相应参数, 对系统进行了数值模拟分析。若给定参数 $r = 0.15, K = 10, d = d_1 = d_2 = e = 0.03, k = 0.5$, 当 $a = 0.5, b = 8, c = ma = 0.45 \times 0.5 = 0.225$ 时, 系统的动态行为如图(1)所示, 此时食蚜蝇种群将会灭绝, 而蚜虫种群将会大爆发; 而当 $a = 0.05, b = 0.05, c = ma = 0.45 \times 0.05 = 0.0225$ 时, 系统的动态行为如图(2)所示, 可以看出此时系统趋于一个稳定的正平衡解, 这意味着蚜虫种群与食蚜蝇种群将以正平衡态的形式持续生存, 而对正平衡点的全局渐近稳定性正在进一步研究。

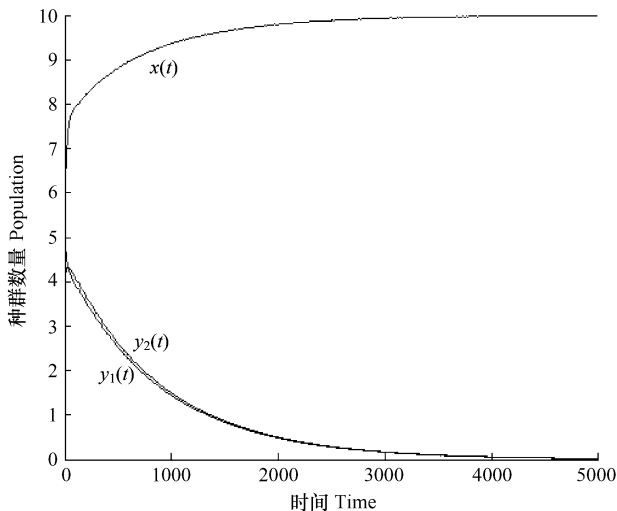


图1 $a = 0.5, b = 8$ 时的数值模拟图
Fig.1 Numerical simulation figure when $a = 0.5, b = 8$

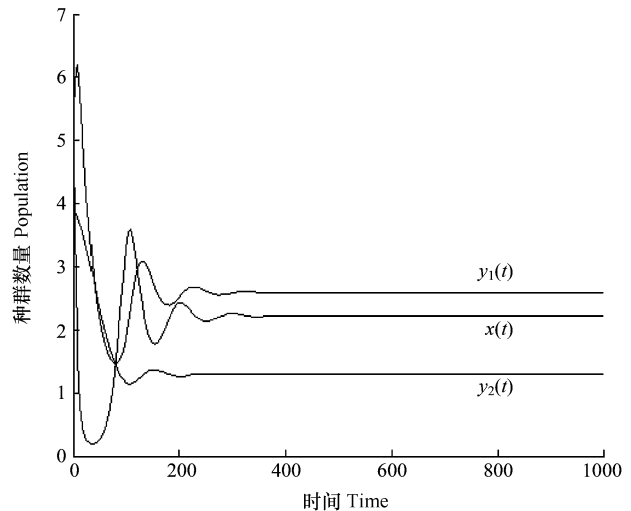


图2 $a = 0.05, b = 0.05$ 时的数值模拟图
Fig.2 Numerical simulation figure when $a = 0.05, b = 0.05$

References:

- [1] Wang W D, Chen L S. A predator-prey system with stage structure for predator. *Computers and Mathematics with Applications*, 1997, 33 (8): 83-91.
- [2] Xiao S W, Wang W D. Periodic solution of predator-prey population model with stage-structure. *Journal of Southwest China Normal University, Natural Science*, 2003, 28(6): 869-873.
- [3] Ma Z H, Li Z Z, Wang S F. Effect of prey refuges on a predator-prey system. *Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)*, 2008, 44(2): 103-106.
- [4] Chen L S, Wang D D, Yang Q C. The models of stage-structured population dynamics. *Journal of Beihua University(Natural Science)*, 2000, 1(3): 185-191.
- [5] Wang Y Q, Shen Z R, Gao L W, Ma X Q. Global qualitative analysis on a wheat aphid-ladybug model with age structured. *Journal of biomathematics*, 2007, 22(1): 59-66.
- [6] Xiao Y N, Chen L S. Global Stability of a Predator-Prey System with Stage Structure for the Predator. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2003, 19(2): 1-11.
- [7] Lu Z Y, Zhou Y C. *Research progress in mathematical biology*. Beijing: Science Press, 2006: 74-87.
- [8] Xu R M, Cheng X Y. *Insect population ecology*. Beijing: Science Press, 2005: 350-383.
- [9] Chen L S. *Math ecology model and research methods*. Beijing: Science Press, 1988: 129-273.
- [10] Chen L S, Chen J. *Nonlinear biological dynamic System*. Beijing: Science Press, 1993: 53-110.
- [11] Cao Y, Zhao H Y. Analysis of the predation of *Episyrphus balteatus* De Geer to *Rhopalosiphum padi*. *Journal of Shaanxi Agricultural Sciences*, 2003(5): 24-26.
- [12] Ma Z EN, Zhou Y C. *Stability theory of ordinary differential equation*. Beijing: Science Press, 2001: 41-95.
- [13] Lu Z Y, Wang W D. *The frontier of biomathematics*. Beijing: Science Press, 2008: 48-56.
- [14] J. K. Hale and P. Waltman. *Persistence in infinite-dimensional systems*. *Society for Industrial and Applied Mathematica*, 1989, 20(2): 388-396.
- [15] H. Smith. *Monotone semiflows generated by functional differential equations*. *Journal of Differential Equations*, 1987, 66(3): 420-442.

参考文献:

- [2] 肖氏武, 王稳地. 一类具阶段结构的捕食者-食饵模型的周期解. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2003, 28(6): 869-873.
- [3] 马智慧, 李自珍, 王淑璠. 具有阶段结构的捕食-食饵模型. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2008, 44(2): 103-106.
- [4] 陈兰荪, 王东达, 杨启昌. 阶段结构种群动力学模型. *北华大学学报, 自然科学版*, 2000, 1(3): 185-191.
- [5] 王育全, 沈佐锐, 高灵旺, 马晓光. 一类具有年龄结构的麦蚜-瓢虫模型的全局分析. *生物数学学报*, 2007, 22(1): 59-66.
- [7] 陆征一, 周义仓主编. *数学生物学进展*. 北京: 科学出版社, 2006: 74-87.
- [8] 徐汝梅, 成新跃. *昆虫种群生态学*. 北京: 科学出版社, 2005: 350-383.
- [9] 陈兰荪. *数学生态学建模与研究方法*. 北京: 科学出版社, 1988: 129-273.
- [10] 陈兰荪, 陈键. *非线性生物动力系统*. 北京: 科学出版社, 1993: 53-110.
- [11] 曹玉, 赵惠燕. 黑带食蚜蝇对禾谷缢管蚜的捕食作用研究. *陕西农业科学*, 2003(5): 24-26.
- [12] 马知恩, 周义仓. *常微分方程定性方法与稳定性方法*. 北京: 科学出版社, 2001: 41-95.
- [13] 陆征一, 王稳地主编. *生物数学前沿*. 北京: 科学出版社, 2008: 48-56.