

440-443 微生物, 种群生长, 动力学, 建模; 5714(14)

第16卷第4期

1996年8月

生态学报 封闭系统;

ACTA ECOLOGICA SINICA

Vol. 16, No. 4

Aug., 1996

## 关于封闭系统中微生物种群生长的动力学建模\*

## KINETIC MODELLING FOR THE GROWTH OF MICROBIAL POPULATIONS IN A CLOSED SYSTEM

刘多森 李振高<sup>✓</sup> 汪枏生 潘映华

Liu Duosen Li Zhengao Wang Zongsheng Pan Yinghua

(中国科学院南京土壤研究所, 南京, 210008)

(Institute of Soil Science, Academia Sinica, Nanjing, China, 210008)

Q938.1

通常认为, 微生物在一次培养中所获得的生长曲线可划分为4个阶段: 迟滞、指数、稳定和死亡阶段<sup>[1,2]</sup>。但是, 也有将生长曲线划分为5个阶段、甚至6个阶段的看法<sup>[3]</sup>。阶段数及阶段分界在划分上的不确定性, 正是定性描述的必然结果。实际上, 整个生长曲线的建模是一个期待解决的问题。按照我们的看法, 微生物生长曲线可以被视为一条连续曲线, 相应的函数是连续可微的, 曲线的上述所谓各“阶段”之间并不存在分割点。基于这种概念, 将有可能建立一种统一模型普遍描述生长曲线的所谓不同“阶段”。显然, 生长曲线因其有极大点, 从而不能被 Logistic 模型以及其他把生物量表达为时间的单调函数的一切模型所描述。

## 1 微生物利用养分的动力学

在研究农药的微生物降解时, 考虑过下列方程<sup>[4~6]</sup>:

$$m = m_0 + \lambda(x_0 - x) \quad (\lambda > 0) \quad (1)$$

$$-\frac{dx}{dt} = kxm \quad (k > 0) \quad (2)$$

式中,  $m$  是可降解农药的微生物在时间  $t$  的数量,  $m_0$  是该微生物的初始数量,  $\lambda$  是该微生物的增量常数,  $x$  是农药在时间  $t$  的浓度,  $x_0$  是农药的初始浓度, 而  $k$  是速度常数。

虽然方程(1)和(2)在于阐明农药的微生物降解问题, 但它们在广义上也可应用于微生物种群生长的情况。在后一情况下,  $m$  和  $m_0$  将分别表示在时间  $t$  和零时间每单位体积中微生物的数量(或质量), 而  $x$  和  $x_0$  将分别表示在时间  $t$  和零时间限制性养分的浓度。

假设  $\delta$  是限制性养分浓度的无用部分, 即对微生物营养不起作用的那一部分浓度的阈值。如果  $x \leq \delta$ , 则微生物不能生存。因此, 可以建议一个关于“食物供应系数” $\varphi$  的概念<sup>[7,8]</sup>:

$$\varphi = \frac{x - \delta}{x_0 - \delta} \quad (x_0 > \delta) \quad (3)$$

- 国家自然科学基金和中国科学院土壤圈物质循环开放研究实验室基金资助课题。本文第1,2节被省略的部分推导过程及微生物实验将在1995年 Ecol. Modelling 杂志详细报道。

收稿日期: 1994 06 30, 修改稿收到日期: 1995 04 16。

显然,在微生物生长过程中,有  $x_0 \geq x \geq \delta$ , 因而有  $1 \geq \varphi \geq 0$ , 考虑到  $\varphi$ , 可将式(1)改写为:

$$m = [m_0 + \lambda(x_0 - x)]\varphi = \zeta_1 + \zeta_2 x + \zeta_3 x^2 \quad (4)$$

在一个封闭系统中,  $\delta$ ,  $m_0$ ,  $\lambda$  和  $x_0$  的值被指定, 则  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  和  $\zeta_3$  成为常数。且有  $\zeta_1 < 0$ ,  $\zeta_2 > 0$ , 和  $\zeta_3 < 0$ 。

将式(4)代入式(2), 并对式(2)积分, 就能得到<sup>[5]</sup>:

$$\ln \frac{x}{x_0} + \frac{g_2}{g_1 - g_2} \ln \frac{x - g_1}{x_0 - g_1} + \frac{g_1}{g_2 - g_1} \ln \frac{g_2 - x}{g_2 - x_0} = -k_1 t \quad (g_1 < x_0 < g_2) \quad (5)$$

式中,  $k_1 = k\zeta_3 < 0$ , 而  $g_1$  和  $g_2$  是多项式  $\zeta_1 + \zeta_2 x + \zeta_3 x^2$  的两个根。方程(5)可以阐明限制性养分浓度  $x$  随时间  $t$  的变化。显然,  $x$  是  $t$  的一个单调减函数, 而且这个函数是隐式的。尽管与微生物生长有关的速度常数受温度的影响很大<sup>[9]</sup>, 但方程(5)在于描述恒温的封闭系统。

## 2 封闭系统中微生物种群生长的建模

令方程(4)对于  $x$  的一阶微商等于零, 可得到:

$$x_M = -\frac{\zeta_2}{2\zeta_3} \quad (6)$$

$$M = \zeta_1 - \frac{\zeta_2^2}{4\zeta_3} \quad (7)$$

式中,  $x_M$  就是限制性养分当  $m=M$  时的浓度, 而  $M$  就是在微生物生长过程中每单位体积内微生物可达到的最大数量(或质量)。

据方程(4), (6)和(7), 有<sup>[8]</sup>:

$$x = \frac{\sqrt{M - \zeta_1} \pm \sqrt{M - m}}{\sqrt{-\zeta_3}} \quad (8)$$

式中, 两个符号“ $\pm$ ”相应于微生物生长过程的两个不同的相, 即“ $+$ ”相应于增长相(从  $m_0$  到  $M$ ), 而“ $-$ ”相应于减小相(从  $M$  到零)。显然, 可以写出<sup>[8]</sup>:

$$x_0 = \frac{\sqrt{M - \zeta_1} + \sqrt{M - m_0}}{\sqrt{-\zeta_3}} \quad (9)$$

$$g_1 = \delta = \frac{\sqrt{M - \zeta_1} - \sqrt{M}}{\sqrt{-\zeta_3}} \quad (10)$$

$$g_2 = \frac{m_0}{\lambda} + x_0 = \frac{\sqrt{M - \zeta_1} + \sqrt{M}}{\sqrt{-\zeta_3}} \quad (11)$$

至此, 将式(8~11)代入方程(5), 就能建立一个关于封闭系统中微生物种群生长的动力学模型<sup>[7,8]</sup>:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sqrt{M - \zeta_1} \pm \sqrt{M - m}}{\sqrt{M - \zeta_1} + \sqrt{M - m_0}} - \frac{\sqrt{M - \zeta_1} + \sqrt{M}}{2\sqrt{M}} \ln \frac{\sqrt{M} \pm \sqrt{M - m}}{\sqrt{M} + \sqrt{M - m_0}} \\ + \frac{\sqrt{M - \zeta_1} - \sqrt{M}}{2\sqrt{M}} \ln \frac{\sqrt{M} \pm \sqrt{M - m}}{\sqrt{M} - \sqrt{M - m_0}} = -k_1 t \end{aligned} \quad (12)$$

式中, “ $\pm$ ”和“ $\mp$ ”中的上面的符号, 即“ $\pm$ ”中的符号“ $+$ ”和“ $\mp$ ”中的符号“ $-$ ”, 相应于微生物生长过程的增长相; 而下面的符号相应于微生物生长过程的减小相。当参数值被给定时, 按方程(12)构造的  $m$  对于  $t$  的曲线如图 1。显然,  $m$  是  $t$  的一个非单调函数。

方程(12)表达的统一模型具有 4 个参数( $m_0$ ,  $M$ ,  $\zeta_1$  和  $k_1$ ), 因而其曲线形态随参数值的变化而有较大

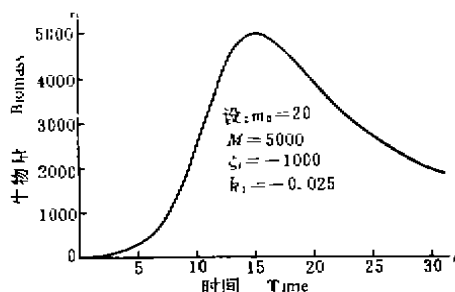


图 1 按方程(12)构造的  $m$  对于  $t$  的曲线

Fig. 1 A  $m$  vs.  $t$  curve constructed by eq. (12)

的“弹性”,以致该模型对生长曲线的拟合是相当好的。对明亮发光杆菌(*Photobacterium phosphoreum*)在液体培养基封闭系统中的生长过程进行过观测,在 48 h 内先后测定明亮发光杆菌 22 次,按方程(12)拟合所得的相关系数为 0.9956,已达 0.001 显著水平<sup>[3]</sup>。在该实验中,拟合得到的参数值为: $m_0=0.03022$ ,  $M=6135$ ,  $\zeta_1=-4941$ ,  $k_1=-0.1073 \text{ h}^{-1}$ 。作者注意到:由于参数值的不同,明亮发光杆菌生长曲线<sup>[3]</sup>的峰形比图 1 的曲线更为陡峭,极大点出现的时间比图 1 延迟。这启示,不同的生长曲线即使在形态上有较大差异,方程(12)都可对其进行描述,只是参数值不同而已。

### 3 相似性观念在机理建模中的作用

如果对性质、过程、关系中的比较抽象的观念,也就是对其中的逻辑给予注意,就能发现自然界中不同现象之间的相似性。可以认为,只要不同现象的逻辑是相同的或相似的,那么描述这些不同现象的数学模型将是相同的或相似的。因此,不难理解质量扩散、热量传导和动量传输的方程具有严格相同的数学形式,而且也不难理解自由放牧的畜群在其棚舍周围的天然草地上的分布可以用质或热的二维扩散规律所描述<sup>[10]</sup>。

在本文中,相似性观念对机理建模也具有重要作用。农药和养分都可作为微生物生长的能源。因此,微生物对养分的利用在逻辑上相似于微生物对农药的降解。这一相似性正是最终导出方程(12)的基本条件。方程(2)的速度规律来源于对农药微生物降解速度的研究<sup>[4-6]</sup>,但它又可解释限制性养分被微生物消耗的速度。而方程(2)本身与化学动力学中的质量作用规律在数学形式上是相同的。由于限制性养分浓度  $x$  与微生物数量  $m$  的乘积反映了两者的接触机会,因此限制性养分被微生物消耗的速度与这个乘积成正比。这正是方程(2)能够成立的根据。微生物在罐装食品中的生长,以及某种藻类在湖泊或水库的富营养化天然水中的繁殖,在逻辑上相似于微生物在实验室中的一次培养过程,因而方程(12)也可用于描述这些现象。

总之,相似性是理解许多自然现象时的一种十分重要的思维观念。相似性观念显然有助于在数学建模方面的科学探索。

### 参 考 文 献

- 1 Stanier R Y, Adelberg E A and Ingraham J L. *General Microbiology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976, 871
- 2 Atlas R M. *Microbiology: Fundamentals and Applications*, 2nd edition. Macmillan, New York, NY, 1988, 807
- 3 Gaudy A F Jr. and Gaudy E T. *Microbiology for Environmental Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York, NY, 1980, 736
- 4 Liu D S and Zhang S M. Kinetic model for degradative processes of pesticides in soil. *Ecol. Modelling*, 1987, 37: 131~138
- 5 Liu D S, Zhang S M and Li Z G. Study on rate model of microbial degradation of pesticides in soil. *Ecol. Modelling*, 1988, 41: 75~84
- 6 刘多森, 张水铭, 李振高等. 关于土壤中农药降解动力学建模的研究. *土壤学报*, 1993, 30: 199~207
- 7 Liu D S, Wang Z S, Zhang S M and Li Z G. Kinetic modelling of pesticidal degradation and microbial growth in soil. *Pedosphere*, 1994, 4: 11~18
- 8 Liu D S, Li Z G, Wang Z S and Pan Y H. An unified model for the different phases of growth of microbial populations in a closed system. *Ecol. Modelling*, 1995, in press

- 9 Zhang S M, Liu D S, Wang Z S and Ma X F. A kinetic model describing the effect of temperature on the loss rate of pesticides in soil. *Ecol. Modelling*, 1993, **70**: 115~125
- 10 Liu D S, Cai W Q and Zhu Y W. A mechanistic model explaining the effect of two-dimensional diffusion of a herd on biomass of natural grasses. *Ecol. Modelling*, 1991, **53**: 281~290

=====

### 《地理学报》征订启事

《地理学报》是由中国地理学会和中国科学院地理研究所主办的我国地理学科中最高学术研究刊物。面向国内外公开发行人。它刊登地理学综合研究和各分支学科研究的最新成果、综述、报道具有方向性的学术思想,发表理论研究与技术进展的各类文章,及时反映地理界的新思想、新观点、新方法。适合于从事地理及其分支学科的科研人员、决策与管理人员、高等院校师生参考阅读。

本刊为双月刊,每期96页,订价为9.80元/期。欢迎广大读者到当地邮局订阅。亦可通过编辑部订阅(邮费另加10%)。地址:北京市安外大屯路917楼《地理学报》编辑部,邮编:100101。本刊编辑部的开户银行:中国工商银行北京市海淀区东升路分理处,户名:中国地理学会,账号:891363-05,联系电话:(010) 64919944-2665,联系人:王群英。

### 欢迎订阅《生态学杂志》

《生态学杂志》是中国生态学会主办的学术刊物,主要刊登生态学研究论文以及有关专题的综述和评论,研究方法和新技术应用;学术讨论与争鸣;国内外学术消息和动态;生态学新书刊介绍;国外生态学研究(包括译文,但必须取得原著作人的授权)的专题生态学知识讲座等。

读者对象为从事生态学研究、教学的科技工作者,有关决策部门的科技管理人员,大专院校师生和中学教师。

本刊为双月刊,每双月11日出版。刊号CN21-1148/Q,邮发代号8-161,定价:每期5.50元,全年33.00元。国内外公开发行人,全国各地邮局均可订阅。

编辑部地址:辽宁省沈阳市文化路72号

电话(024)3916250 传真(024)3843313 邮政编码110015