

新的养分效应数学模型—对 Mitscherlich 方程的补充

A NEW MATHEMATICAL MODEL FOR NUTRIENT EFFECT — MITSHERLICH'S EQUATION SUPPLEMENT

Mitscherlich(1909)提出了养分量与产量关系的模型: $y = A(1 - e^{-c_1x})$ 。

该式表明随养分量 x 的增加产量 y 趋向理论最大值 A , 而实际上, 当养分量超过最适数量后往往会变成毒害因素, 反而导致产量下降, 米氏方程却不能表达这一事实。为此, 作者尝试建立新的养分效应数学模型, 以弥补米氏方程之不足。

一、新模型的建立

1. Mitscherlich方程

设养分量为 x , 相应的实际产量为 y ; A 为增施该养分可以达到的最高产量, 则根据报酬递减律原理, 养分的精确边际产量 dy/dx 与 $A - y$ 有关, 即:

$$dy/dx = c_1(A - y) \quad (1)$$

解式(1)可得:

$$y = A(1 - e^{-c_1x}) \quad (2)$$

此即著名的米氏方程, 式中 c_1 为效应系数。

2. 新模型的建立

米氏方程中养分效应系数 c_1 为常数, 即随养分量的增加, 养分的增产效应保持不变, 但许多实际情况是养分的增产效应随养分量的增加而下降, 假定是呈直线下降的, 即:

$$c_1 = c - a'x \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)得:

$$dy/dx = (c - a'x)(A - y) \quad (4)$$

解式(4)可得:

$$y = A(1 - e^{-cx + a'x^2}) \quad (5)$$

一般地, $y|_{x=0} = y_0$ 时, 可得:

$$y = A(1 - Ie^{-cx + a'x^2}) \quad (6)$$

式中, $a = a'/2$, $I = A_0/A$, $A_0 = A - y_0$

式(5)即为养分量与产量关系新的数学模型, 该模型表明两者成抛物线型关系(图1)。

二、新模型的特性

1. 新模型的数学特性

定义域: $[0, (c + \sqrt{c^2 - 4a'/lnI}) / 2a']$

最适养分量 $x_{opt} = c/2a'$; 最大产量 $y_{max} = A(1 - e^{-c^2/4a'})$ 。

2. 新模型曲线的养分效应特性

本文于1990年5月11日收到。

根据 Liebig (1840) 最小养分律和 Shelford (1913) 耐性定律, 当某一养分低于最小临界值时, 即成为最小限制因子, 此时养分量与产量成直线正相关, $Y_1 = B_0 + B_1 X$; 当养分量超过最大临界值时又将成最大限制因子, 此时, 养分量与产量成直线负相关, $Y_2 = B_0' - B_1' X$ 。从图 2 可见新模型曲线 y 与直线 Y_1 、 Y_2 交于 P_1 、 P_2 点, 因此, 相应的 X_1 、 X_2 即为该养分的最小临界值和最大临界值。点 P_1 、 P_2 将曲线分成三个部分, 第一部分 $(0, x_1)$ 称为正效应阶段, 此阶段养分成为最小限制因子, 其养分效应符合 Liebig 的最小养分律。第二部分 $[X_1, X_2]$ 称为饱和效应阶段, 区间 $[X_1, X_2]$ 亦称为耐性限度, 此时, 通过生物对该养分的耐性及养分的补偿作用, 使生物生长维持最佳状态。第三部分 $X > X_2$, 此时养分已成为毒害因素, 再增加养分量反而导致产量下降, 即负效应阶段。

三、新模型参数的生态学意义

1. A 和 I : A 为增施某一养分可以达到的最高产量, 其大小取决于综合环境因素以及该生物的遗传特性。参数 I 表示增施该养分的最大增产潜力占理论最大产量的比例, 为增产潜力系数。

2. c 和 a : c 为正效应系数, 反映该养分对产量正效应的大小。 a 是负效应系数, 表示该养分对产量的干涉度(即负效应), 由于养分的正效应和负效应相互作用的结果, 导致产量与养分量间的关系。当然模型各参数不是恒定的, 而是随环境及生物内在因素的改变而异。

四、新模型的应用

1. 模型的配置

式(6)经变换可得:

$$\ln(A - y) = \ln A_0 + (-c)x + ax^2$$

令, $y' = \ln(A - y)$, $b_0 = \ln A_0$, $b_1 = -c$, $b_2 = a$ 则

式(6)可变换成抛物线方程:

$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

因此, 可用最小二乘法求得该回归方程。由于该回归方程的显著性尺度 F 与 A 值有关, 两者成曲线相关(图 3)。因此, 可以事先作 $A-F$ 曲线, 并从曲线上查得对应于 $F > F_\alpha$, 且曲线曲率较大处的 A 值, 这样既可确保回归方程的显著性, 又可获得一个较为合理的 A 值, 较之直接估计要准确可靠。

2. 实例应用

例 1: 用新模型表示氮肥施用量与皮棉产量的关系(表 1)。经计算可得氮肥施用量与皮棉产量的关

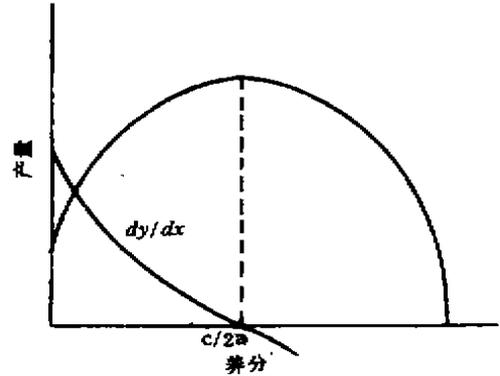


图 1 新模型模式图

Fig. 1 The curve of the new model

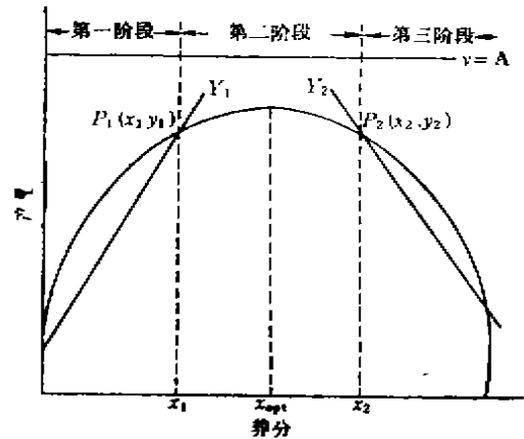


图 2 新模型养分效应曲线

Fig. 2 The nutrient effect curve of the new model

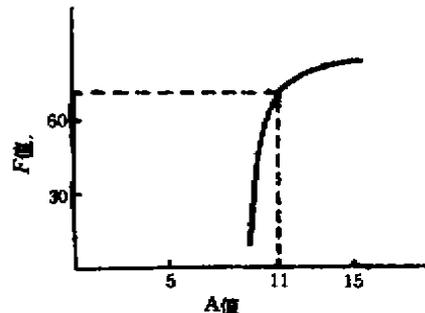


图 3 A-F 曲线

Fig. 3 A-F curve

系为: $y = 110(1 - 0.2887e^{-0.1373x + 0.00834x^2})$
 ($F = 77.61 > F_{0.01}$) 相关指数 $r^2 = 0.9874$, 可见
 新模型能很好地表达两者的关系。由于试验是在一
 定土壤肥力基础上进行, 且试验范围较小, 故该试
 验的施氮效应仅表现为模型的第二阶段。

四、结 论

1. 由于自然界普遍存在养分的负效应现象,
 作为对米氏方程的补充, 建立新模型:

$y = A(1 - Ie^{-rx + ax^2})$, 新模型当 $a = 0, I = 1$
 时, 即为米氏方程。

2. 根据Liebig的最小养分律和Shelford的耐性定律, 可将新模型曲线划分成三个效应阶段, 即, 正
 效应阶段、饱和效应阶段和负效应阶段。

表 1 棉花施氮效应*

Table 1 Applied nitrogen effects on cotton
 production

氮肥用量(千克/亩)	皮棉产量(千克/亩)
0.0	82.75
5.0	93.00
7.5	95.00
10.0	93.42
12.5	92.25

* 引自李文才等1989。

从 容

Cong Rong

(浙江省淡水水产研究所, 湖州)

(Zhejiang Institute of Freshwater Fisheries, Huzhou)