

## 再次改进的Iwao $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型

于秀林 任朝佐

(北京大学数学系)

### 摘 要

Iwao的 $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型 $\overset{*}{m} = a + \beta m$ 是线性的。但在自然界中， $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 经常不是线性的，因此Iwao的模型有明显的局限性。

徐汝梅等改进了这个模型。改进的Iwao的 $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型是

$$\overset{*}{m} = a' + \beta' m + \gamma m^2.$$

我们把 $\beta$ 作为 $m$ 的二次函数来处理， $\beta = \beta' + \gamma m + \delta m^2$ 。于是，再次改进的模型就成为，

$$\overset{*}{m} = a' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3.$$

这个再次改进的模型就更一般化了。它既可用于描述 $\overset{*}{m}$ 与 $m$ 之间呈线性关系的情形，又可以用于描述 $\overset{*}{m}$ 与 $m$ 之间呈三次非线性关系的情形。

在这个模型中四个参数的每一个均有其特定的生物学含义。

当 $m$ 充分小时，再次改进的Iwao模型可以被原Iwao模型或改进的Iwao模型所近似代替。

我们在研究一些昆虫的空间分布模型时，发现种群平均拥挤度 $\overset{*}{m}$ 与平均密度 $m$ 的关系大多数不是线性的，而Iwao在1968、1977所描述的生物种群空间分布图式的 $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型是用线性关系式

$$\overset{*}{m} = a + \beta m \quad (1)$$

给出的，这与实际情况不全符合。我们正在考虑改进时，在《生态学报》上见到徐汝梅等合写的“改进的Iwao  $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型”，他们用二次式模型 $\overset{*}{m} = a' + \beta' m + \gamma m^2$ 改进了Iwao的线性模型，这在理论上与实际应用上都有很大意义。

本文再次改进Iwao  $\overset{*}{m}$ - $\overset{*}{m}$ 模型，用三次式模型 $\overset{*}{m} = a' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3$ 来改进Iwao的线性模型，这个新模型中四个参数 $a'$ 、 $\beta'$ 、 $\gamma'$ 、 $\delta$ 都有特定的生物学含义，可用于探讨和分析种群的空间格局，有助于昆虫空间分布问题的研究。

在徐汝梅等文章中曾将Iwao公式中的系数做了生物学含义的解释： $a$ 为每个基本成分中个体数的分布的平均拥挤度， $\beta$ 为基本成分的分布的相对聚集度。在该文中实际上是假设 $\beta$ 随 $m$ 而变化的速率是常数 $\gamma$ ，因而设 $\beta$ 是 $m$ 的一次式。

我们假设 $\beta$ 随 $m$ 而变化的速率不止是常数，而是与 $m$ 有关的，因为种群平均密度 $m$ 变大时，相对聚集度 $\beta$ 变化的速率也随之变大，因此设

$$\beta = f(m) = \beta' + \gamma m + \delta m^2 \quad (2)$$

于是

$$f'(m) = \gamma + 2\delta m$$

$$f''(m) = 2\delta$$

所以 $\beta$ 随 $m$ 而变化的速率是 $\gamma + 2\delta m$ ， $\beta$ 随 $m$ 而变化的加速率是 $2\delta$ 。

将 (2) 代入 (1) 中得

$$\begin{aligned} m^* &= \alpha + (\beta' + \gamma m + \delta m^2)m \\ &= \alpha + \beta' m + \gamma m^2 + \delta m^3 \end{aligned}$$

将这个再次改进的 Iwao  $m^*-m$  模型记为

$$m^* = \alpha' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3 \quad (3)$$

其中  $\alpha'$  是每个基本成分中个体数的分布的平均拥挤度。

$\beta'$  是在低密度下基本成分的相对聚集度；

$\gamma' + 2\delta m$  是基本成分的相对聚集度随种群密度而变化的速率；

$2\delta$  是基本成分的相对聚集度随种群密度而变化的加速度。

当种群密度足够低时，右端第四项  $m^3$  为高阶无穷小，可予忽略，即相当于不考虑加速度， $\delta = 0$ ，则为徐汝梅等人改进的 Iwao  $m^*-m$  模型。

当  $m^2$  项也看成为高阶无穷小，则  $m^2$  项也可忽略，即相当于不考虑速率， $\gamma' = 0$ ，即为原来的 Iwao  $m^*-m$  模型。

因此 Iwao 的模型及改进的 Iwao 模型是本模型的特例，本文的再次改进的 Iwao 模型既可用于  $m^*-m$  呈线性关系情形，又可应用于  $m^*-m$  呈二次非线性关系以及呈三次非线性关系的情形。

通过下面实例的计算，可以看出再次改进的模型，对某些具体生物种群来说，能更好地描述  $m^*-m$  之间的关系。

例 河北省易县西陵蜘蛛山侧柏苗圃地七星瓢虫的成虫。

在 1982 年 10 月 21 日进行七星瓢虫的成虫种群分布型调查，分 20 个小区，每小区为 100 米<sup>2</sup>，每 1 米<sup>2</sup> 为一个样方，总共取样方 2,000 个，这批数据由河北林学院阎浚杰老师提供，对这批数据用前述三种不同公式进行了计算，结果见表 1。

表 1 按三种公式计算的聚集指标

table 1 the aggregation indices calculated by three formulas

公 式	聚集指标	七星瓢虫的成虫
$m^* = \alpha + \beta m$	$\alpha$	0.607638
	$\beta$	0.495809
$m^* = \alpha' + \beta' m + \gamma m^2$	$\alpha'$	0.562572
	$\beta'$	1.82449
	$\gamma'$	-3.23772
$m^* = \alpha' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3$	$\alpha'$	0.34463
	$\beta'$	12.7047
	$\gamma'$	-88.9332
	$\delta$	141.594

将上述三个函数作图如下：

- 其中
- (a)  $m^* = \alpha + \beta m$
  - (b)  $m^* = \alpha' + \beta' m + \gamma m^2$
  - (c)  $m^* = \alpha' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3$

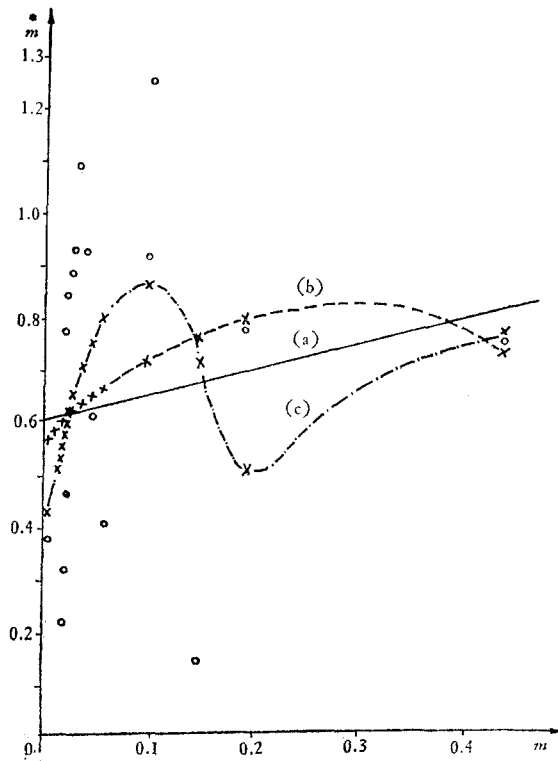


图 1 按三种公式画七星瓢虫成虫的曲线  
fig.1 drawing these curves about ladybeetle adults according to three formulas

○ 实测点

设偏离度BIAS为：

BIAS(1)：用Iwao模型估计拥挤度时与实测拥挤度的偏离度

$$BIAS(1) = \frac{\sum_{i=1}^n (m_{1i}^* - m_i)^2}{n}$$

BIAS(2)：用改进的Iwao模型估计拥挤度时与实测拥挤度的偏离度

$$BIAS(2) = \frac{\sum_{i=1}^n (m_{2i}^* - m_i)^2}{n}$$

BIAS(3)：用再次改进的Iwao模型估计拥挤度时与实测拥挤度的偏离度

$$BIAS(3) = \frac{\sum_{i=1}^n (m_{3i}^* - m_i)^2}{n}$$

- \* $m_{1i}$ ：按Iwao模型用 $a$ 及 $\beta$ 参数所求的各平均拥挤度的估值；
- \* $m_{2i}$ ：按改进的Iwao模型用 $a'$ 、 $\beta'$ 及 $\gamma$ 参数所求的各平均拥挤度的估值；
- \* $m_{3i}$ ：按再次改进的Iwao模型用 $a'$ 、 $\beta'$ 、 $\gamma'$ 及 $\delta$ 参数所求的各平均拥挤度的估值；
- \* $m_i$ ：实测平均拥挤度；

$n$ : 样方数。

用上述三个不同模型计算偏离度的结果见表 2。

表 2 三种模型的偏离度的比较  
table 2 comparing with the biases of the three models

	原Iwao模型的 偏离度BIAS(1)	改进的Iwao模型的 偏离度BIAS(2)	再次改进的Iwao模 型的偏离度BIAS(3)
七星瓢虫的成虫	0.10391	0.1022	0.0912803

从表 2 中可看出再次改进的 Iwao  $m$ - $m$  模型的偏离度比前两个模型的偏离度都小。

### 参 考 文 献

- 徐汝梅、刘来福、丁岩钦 1984 改进的 Iwao  $m$ - $m$  模型。生态学报 4 (2): 111—118。  
Iwao, S. 1968 A new regression method for analyzing the aggregation patten of animal populations. *Res.Popul.Ecol.* 10(1):1—20.  
——— 1977 The  $m$ - $m$  statistics as a comprehensive method for analyzing spatial patterns of biological populations and its application to sampling problems. in "Studies on methods of estimating population density, biomass and productivity in terrestrial animals" ed. M. Morisita, 21—46.

## THE FARTHER IMPROVING OF IWAO'S $M$ - $M$ MODEL

Yu Xiulin Ren Chaozuo

(Department of Mathematics, Beijing University)

Iwao's  $m$ - $m$  model  $m^* = a + \beta m$  is liner. But in nature,  $m^*$  is often not linear, so that the model of Iwao has obvious limitations.

Xu Rumei *et al.* have improved the model. The improving of Iwao's  $m$ - $m$  model is  $m^* = a' + \beta' m + \gamma m^2$ .

We treat  $\beta$  as a function of  $m$ ,  $\beta = \beta' + \gamma m + \delta m^2$ . Thus, the farther improved model becomes:

$$m^* = a' + \beta' m + \gamma' m^2 + \delta m^3.$$

This farther improved model is more generalized. It can be used in describing the relationships between  $m^*$  and  $m$  under both linear and third degree non-linear condition.

Each of the four parameters in this model has its particular biological meaning.

When  $m$  is sufficient small, the farther improving of Iwao's model can be replaced by Iwao's model or the improving of Iwao's model.