

主成分分析方法在鲢鱼种生长体征 指标分析中的应用*

华元渝 胡传林 张水元 陈少莲

(中国科学院水生生物研究所)

鱼类的生长是一个复杂的过程。生长时不单长度增长、体积增大,还伴随着体内生理状况的变化,生长不仅表现为种的遗传性,而且受到环境因素的影响。鱼类生长过程中的特点通常用个别体征指标,如长度、重量的变化来描述,体高则很少考虑到(陈佩熏等, 1965; Васнецов, 1953; Кузнецов, 1972; Чугунова, 1959),其实不论从哪一指标来反映都不全面。鱼体生长随着时间的推移,不仅长度增长、重量增加,而且鱼体的高度也增大,它们各自的生长不是孤立的,而是相互之间存在着某种内在联系,并且每种鱼类的这种联系都有自己的特点。采用体征的多指标变化来描述鱼类的生长规律是一个值得探讨的问题。特别是在鱼类生长过程中,长度、高度、重量这三个指标存在着相关关系时,是否存在一、二个共同的、彼此独立的因素在支配着这三者的数量增长呢?因此,对鱼类生长进行数学和生物学的综合分析是必要的。本文选择鲢鱼种为材料,从多指标中最简单的三维指标入手,对鲢鱼种的三个体征指标(全长 L 、体重 W 、体高 h)采用多元统计中主成分分析(Principle Component Analysis)有的也称为主分量分析或主轴分析的方法(复旦大学, 1979)来描述鲢鱼种的生长。假若用三维体征指标能很好地对生长进行数学描述,那么就可以对于更多维指标的鱼类生长采用同一方法处理。本文试图能寻找一个能反映和综合研究我国饲养鱼类幼鱼及成鱼生长规律的合适方法。

一、材料及方法

鲢鱼种生长的材料鱼取自中国科学院水生生物研究所2号试验鱼池。1980年5月13日当人工孵化鱼苗的卵黄囊刚消失时开始试验。每次取样10尾,在解剖镜下测量全长、体高,在 $\frac{1}{10}$ 万电动分析天平上称量体重。开始时,鱼苗个体的重量较轻,每尾之间重量及长度、高度的差异不大,因此全长、体高分开测量,体重按10尾鱼的平均称重表示。随着鱼体长大,从6月11日起,每次取样5尾,每尾鱼的体征值是分别测量的。试验到7月15日结束,共取样38次。

原计划逐日取样,后因种种原因实际上未能实现。结果因取样不连续及各次样品中条数有时也不一致,给分析数据造成一定困难。为了尽量减少上述原因造成的影响,事前将原始数据按取样日期(考虑到每次取样的间隔天数)进行了平均,求出各次样品的基本量即平均全长、平均体高及平均体重(见表1),然后对这些基本量进行分析,其步骤是首先在普通

* 参加本工作的还有田玲同志。

表 1 鲢鱼种主长的体征指标及主成分

取样 日期	全 长		体 高		体 重		主 成 分	f_1 的平均值	主 成 分	f_2 的平均值
	平均 (厘米)	δ_{n-1}	平均 (厘米)	δ_{n-1}	平 均 (克)	δ_{n-1}	f_1		f_2	
5.13	0.60	0.0205	0.10	0.0000	0.000975	—	19.823518	—	28.767745	—
.14	0.70	0.0000	0.11	0.0000	0.001275	—	22.562221	21.74	32.942218	31.70
.15	0.71	0.0188	0.11	0.0095	0.001345	—	22.823049	22.97	33.389683	33.42
.16	0.72	0.0272	0.12	0.0099	0.001675	—	23.534128	23.66	33.925436	34.33
.17	0.76	0.0452	0.12	0.0105	0.002275	—	24.609440	26.21	35.683296	37.69
.19	0.93	0.1349	0.15	0.0279	0.005100	—	30.479769	29.20	43.469565	41.80
.20	0.99	0.1195	0.16	0.0137	0.005785	—	32.495488	32.91	46.242143	46.42
.22	1.06	0.0503	0.19	0.0110	0.007925	—	35.759037	37.41	49.552262	52.44
.23	1.33	0.0778	0.21	0.0201	0.013175	—	43.985895	41.54	61.526393	57.65
.24	1.34	0.0991	0.22	0.0211	0.015345	—	44.880974	44.99	61.878146	62.24
.26	1.37	0.0981	0.23	0.0404	0.015820	—	46.114209	46.49	63.308329	63.53
.27	1.41	0.1600	0.26	0.0601	0.016600	—	48.480274	51.13	65.391053	66.64
.28	1.55	0.2047	0.32	0.0459	0.028660	—	55.785372	54.25	71.233291	70.27
.29	1.63	0.1585	0.32	0.0337	0.035430	—	58.492996	58.60	74.192011	74.15
.30	1.69	0.1131	0.35	0.0369	0.037780	—	61.523717	60.70	77.026665	76.37
.31	1.71	0.1506	0.35	0.0337	0.038330	—	62.086773	67.09	77.880595	80.46
6.2	1.96	0.1602	0.47	0.0540	0.079760	—	77.666085	74.82	86.470676	85.45
.3	2.13	0.1058	0.48	0.0393	0.102830	—	84.712412	83.67	92.003869	91.57
.4	2.23	0.1840	0.50	0.0548	0.108200	—	88.636194	88.11	96.240095	95.46
.5	2.29	0.2576	0.50	0.0655	0.116560	—	90.995162	101.70	98.130885	103.23
.6	2.86	0.1886	0.71	0.0738	0.227600	—	125.476629	117.17	115.331438	108.07
.11	2.90	0.3044	0.75	0.0500	0.296170	0.0613	135.045945	163.83	110.74945	120.56
.12	4.40	0.2620	1.02	0.0274	0.760000	0.0635	230.957922	201.42	135.621976	126.38
.14	4.44	0.7115	1.05	0.1458	0.810000	0.0976	238.245987	239.07	132.782700	134.97
.16	4.60	0.4401	1.09	0.0758	0.850000	0.1942	248.004239	246.99	136.511292	136.28
.17	4.73	0.5449	1.10	0.1458	0.880000	0.3015	254.728254	268.29	139.533625	133.32
.18	5.08	0.7328	1.23	0.1823	1.210000	0.4060	302.127497	289.04	123.925644	129.84
.23	5.21	0.4472	1.25	0.1084	1.250000	0.3310	310.275763	313.22	126.062265	122.53
.24	5.30	0.5805	1.29	0.0742	1.380000	0.3221	327.257219	324.84	117.609602	120.43
.25	5.43	0.3814	1.30	0.0612	1.440000	0.2759	336.981234	339.87	117.631935	118.65
.26	5.71	0.8777	1.33	0.1924	1.540000	0.8172	355.361171	361.16	120.699819	116.61
.27	5.82	0.3867	1.40	0.1173	1.840000	0.2772	391.123036	383.83	96.498950	103.13
.28	5.94	0.6066	1.42	0.1924	1.940000	0.6268	405.017474	407.48	92.181106	93.38
7.1	6.20	0.2775	1.46	0.0570	2.070000	0.2280	426.314006	433.45	91.454348	82.27
.3	6.32	0.4817	1.57	0.1917	2.420000	0.7909	469.026703	457.08	63.165096	71.61
.5	6.36	0.3209	1.59	0.1095	2.470000	0.4045	475.890517	497.09	60.211532	53.87
.9	6.96	0.7393	1.69	0.1797	2.980000	0.7460	546.362707	538.69	37.622312	35.89
.14	7.22	0.4930	1.71	0.1746	3.380000	0.9396	593.810737	—	9.666978	—

坐标纸上点出基本量重量与全长、重量与体高的相应点，并计算重量与全长 ($W = aL^b$)，重量与体高 ($W = aH^b$) 的幂指数回归方程式，在坐标纸上画出相应的回归曲线 (图 1、2)，从图中初步可以判断三个基本量之间存在有相关关系，因此可以通过主分量分析找到比原指标数较少，彼此又无关的支配着这三者的数量增长的综合指标。于是由每日的平均全长 (L_i)、平均体高 (h_i) 及平均体重 (W_i)，这里 $i = 1, 2, \dots, 38$ ，所组成的数据矩阵

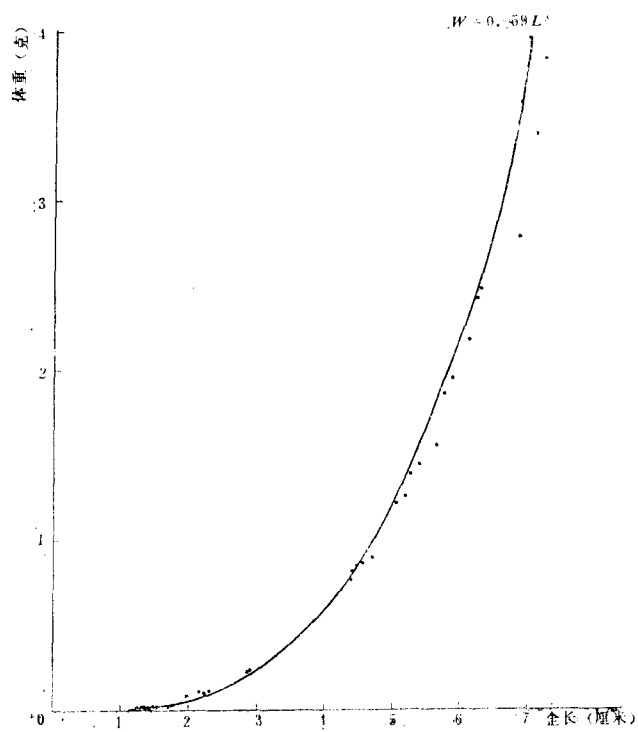


图1a 鲢鱼种体重与全长的相关曲线

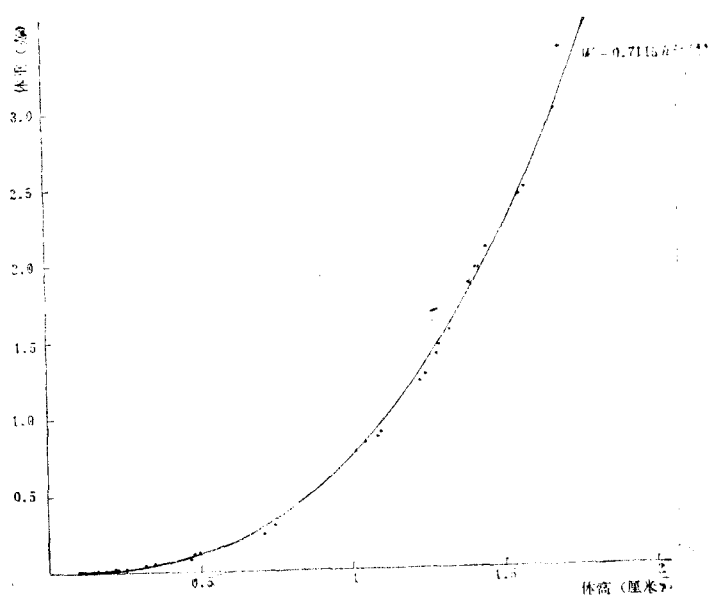


图1b 鲢鱼种体重与体高的相关曲线

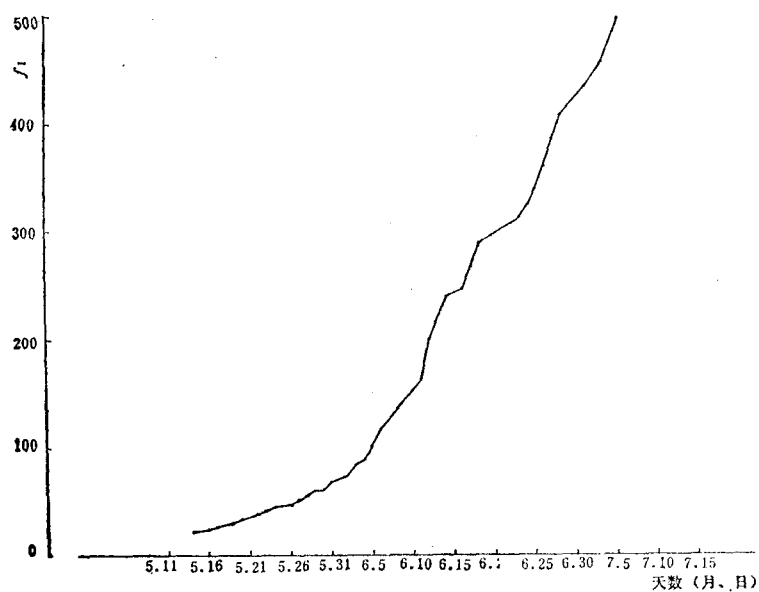


图2a 由特征值 λ_1 所确定的主成分 $\bar{f}_1$ 的日变化曲线

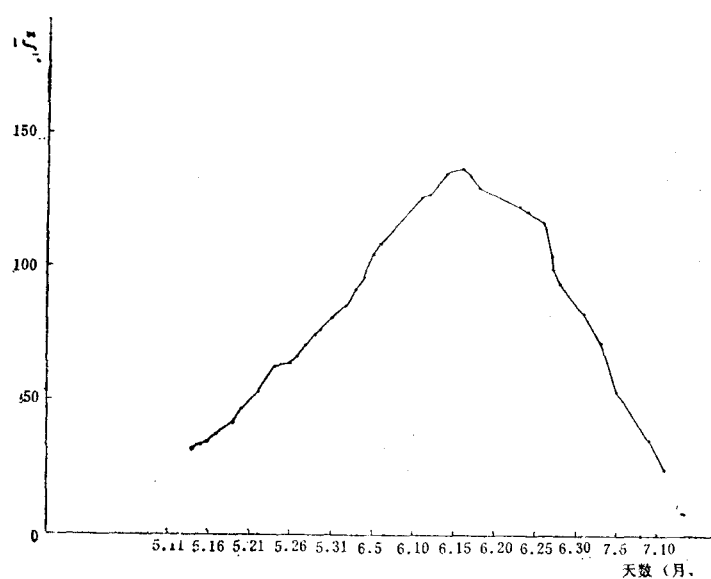


图2b 由特征值 λ_2 所确定的主成分 $\bar{f}_2$ 的日变化曲线

$X = \begin{pmatrix} L' \\ h' \\ W' \end{pmatrix}$ 经过变换, 写成数学式即

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} L' \\ h' \\ W' \end{pmatrix}$$

这样就将原来的三个体征指标经过上述线性组合后综合为三个综合指标, 我们把新得到的综合指标 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ 称为主成分。主成分 f 是通过数据矩阵 X , 计算出方差阵

$$A = \begin{pmatrix} S_{l^2} & S_{lh} & S_{lw} \\ S_{hl} & S_{h^2} & S_{hw} \\ S_{wl} & S_{wh} & S_{w^2} \end{pmatrix}$$

后, 再求出方差阵的特征值

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

及各特征值相应的特征向量

$$V = \begin{pmatrix} V_{1j} \\ V_{2j} \\ V_{3j} \end{pmatrix} \quad j=1, 2, 3 \text{ 而得到的。}$$

所得到的主成分的顺序由特征值 λ_j , $j=1, 2, 3$ 的大小所确定, 这里 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, 因此 f_1 叫做第一主成分, f_2 叫做第二主成分, f_3 叫做第三主成分。主成分所包含的信息量可通过式

$\lambda_j \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \right)^{-1}$ 及 $\sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j \right)^{-1}$, $k=2, 3$ 逐次计算特征值的贡献率及累计贡献率来估量, 从

而再根据累计贡献率的百分量取舍特征值, 选择主成分的个数。表 2 列出了数据矩阵 X 的三个特征值及相应的特征向量和特征值的累计贡献率。表 2 中特征值 λ_1 的贡献率已达到 98.43%, 而前两个特征值 λ_1, λ_2 的累计贡献率达到了 99.99%, 第三个特征值的贡献率几乎是零, 就是说几乎没有贡献。因此由相应的特征向量得到有用的主成分只有两个, 即 f_1 和 f_2 (表 1)。为了使主成分的变化曲线平滑, 我们将主成分某日的值与前后值一起取其平均值, 用 f_1, f_2 表示 (表 1), 进一步在常用坐标纸上分别点出主成分 f_1 和 f_2 与取样时间的坐标点并连成曲

表 2 特征值、累计贡献率及相应的特征向量

特征值 序号	特 征 值	累计贡献率 (%)	特 征 向 量		
			V_{1j}	V_{2j}	V_{3j}
λ_1	5.800	98.43	25.3828	42.4251	100
λ_2	0.092	99.99	-45.4465	-11.4238	-100
λ_3	0.000	—			

线 (图 2a、b), 为了进一步剖析生长的主成分并分析全长、体高、体重各体征指标的特点, 对主成分矩阵 $\bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{pmatrix}$ 又经过一次变换, 求出了主成分的因子荷载量得到了主成分的荷载矩阵, 写成数学式即 $X = \rho' \bar{f}$ ρ 称为因子荷载量, 表明主成分 $\bar{f}_j$ 与原来体征指标 L、h、W 间的相关系数

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \\ \rho_{31} & \rho_{32} \end{pmatrix} \quad \text{叫做荷载矩阵, 同时计算了各体征指标的因子荷载比}$$

$\left[\frac{\rho_{1j}}{\rho_{12}} \quad j=1, 2, 3 \right]$ (表 3), 最后由荷载矩阵预报了鲢鱼种的全长、体高及体重, 其实测平均值与预报值见表 4。

表 3 主成分因子荷载量及荷载比

	$\rho_{1j} (L)$	$\rho_{2j} (h)$	$\rho_{3j} (W)$
因子荷载量 {	0.011839	0.003007	0.005698
	0.012280	0.002348	-0.004107
荷载比	0.964054	1.280805	-1.3873609

表 4 鲢鱼种体征指标的实测值与预报值

实测全长 (厘米)	预估全长 (厘米)	实测体高 (厘米)	预估体高 (厘米)	实测体重 (克)	预估体重 (克)
0.70	0.65	0.11	0.139	0.001275	-0.006127
0.71	0.66	0.11	0.147	0.001345	-0.006072
0.72	0.70	0.12	0.152	0.001675	-0.005973
0.76	0.77	0.12	0.167	0.002275	-0.005222
0.93	0.86	0.15	0.186	0.005100	-0.005040
0.99	0.96	0.16	0.208	0.005785	-0.002847
1.06	1.09	0.19	0.235	0.007925	-0.001894
1.33	1.20	0.21	0.260	0.013175	0.000272
1.34	1.30	0.22	0.281	0.015345	0.001107
1.37	1.33	0.23	0.289	0.015820	0.004363
1.41	1.41	0.26	0.307	0.016600	0.012350
1.55	1.51	0.32	0.328	0.028660	0.020939
1.63	1.60	0.32	0.350	0.035430	0.029814
1.69	1.66	0.35	0.361	0.037780	0.032675
1.71	1.78	0.35	0.390	0.038330	0.056928
1.96	1.94	0.47	0.425	0.079760	0.075894
2.13	2.12	0.48	0.466	0.102830	0.101223

续 4

实测全长 (厘米)	预估全长 (厘米)	实测体高 (厘米)	预估体高 (厘米)	实测体重 (克)	预估体重 (克)
2.23	2.22	0.50	0.488	0.103200	0.110569
2.29	2.47	0.50	0.547	0.116560	0.156140
2.86	2.71	0.71	0.605	0.227600	0.224439
2.90	3.42	0.75	0.774	0.296170	0.439087
4.40	3.94	1.02	0.901	0.760000	0.629407
4.44	4.49	1.05	1.034	0.810000	0.808709
4.60	4.60	1.09	1.061	0.850000	0.848465
4.73	4.81	1.10	1.118	0.880000	0.981971
5.08	5.02	1.23	1.172	1.210000	1.114476
5.21	5.21	1.25	1.227	1.250000	1.282232
5.30	5.32	1.29	1.257	1.380000	1.357055
5.43	5.48	1.30	1.298	1.440000	1.449996
5.71	5.71	1.33	1.357	1.540000	1.579672
5.82	5.81	1.40	1.394	1.840000	1.764127
5.94	5.97	1.42	1.442	1.940000	1.938870
6.20	6.14	1.46	1.494	2.070000	2.132409
6.32	6.29	1.57	1.539	2.420000	2.310769
6.36	6.54	1.59	1.617	2.470000	2.612236
6.96	6.82	1.69	1.700	2.980000	2.922517

二、结果与讨论

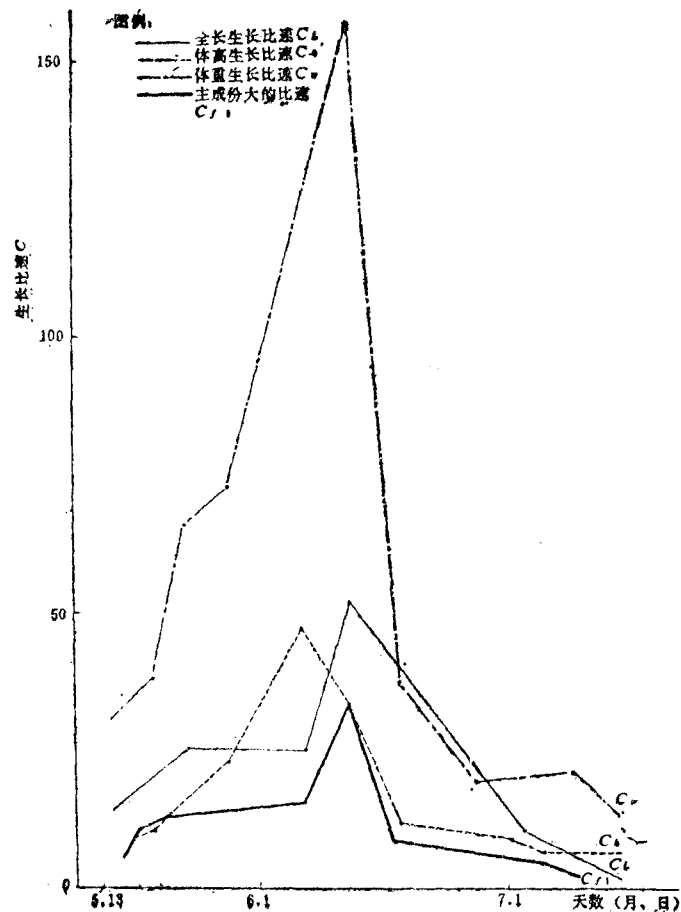
由数据矩阵 X 得到的三个特征值中, 第一个特征值 λ_1 的贡献率已达到 98.43%, 表明由三个体征指标经过一次线性组合后所得到的第一主成分 f_1 实际上已能够反映鲢鱼种生长的主要变化情况。因此, 本文采用主成分 f_1 来综合反映全长、体高及体重的变化情况。另外, 在鱼类生态学中, 从鱼体生长的体征指标来比较鱼的生长速度或一年之中各段时间的平均生长速度时, 过去是采用相对增长率 (称为比速 C) 来表示的 (Чугунова, 1959), 即在等距的时间间隔内用鱼在开始增长和增长结束时的增长值和开始增长时的数值两者之间的百分率来表示的。其比速按公式 $C_t = \frac{V_2 - V_1}{V_1} \cdot 100$ 来计算。式中 V 表示某一体征指标。

我们找到的主成分 f_1 , 它是否也能象过去单指标那样用比速来比较鱼的生长速度呢? 为此, 我们分别对基本量 L 、 h 、 W 及主成分 f_1 以时间一天为单位, 在相隔两天以上的值, 其某天的值是用内插法求出的, 计算了鲢鱼种的全长、体高、体重及主成分 f_1 的比速, 并画出了它们的变化曲线 (表 5 图 3)*。从表 5 图 3 可以看到: 全长、体高、体重的生长比速的变

* 为了能较直观地比较不同指标间的比速变化, 图 3 中所示的变化曲线是由各取样日中较高比速值表示的简化图。

表 5 鲢鱼种各体征指标及主成分 f_1 的比速

取样日期 (月、日)	长度生长比速	体高生长比速	体重生长比速	主成分 f_1 生长比速
5.13				
.14	14.754	10.000	30.769	13.812
.15	1.429	—	5.490	1.157
.16	1.408	9.091	24.535	3.115
.17	5.556	—	35.821	4.568
.19	10.059	11.111	38.305	10.657
.20	6.452	6.667	13.431	6.611
.22	3.415	8.571	15.609	4.782
.23	25.472	10.562	66.246	23.007
.24	0.752	4.762	16.471	2.035
.26	1.107	2.222	1.524	1.355
.27	2.920	13.043	4.930	5.131
.28	9.929	23.077	72.651	15.068
.29	5.162	—	23.622	4.854
.30	3.681	9.375	6.633	5.182
.31	1.138	—	1.456	0.913
6.2	6.812	14.634	35.083	11.148
.3	8.673	2.128	28.924	9.072
.4	4.695	4.167	5.222	4.632
.5	2.691	—	7.726	2.661
.6	24.891	42.000	95.264	37.894
.11	0.277	1.078	4.855	1.438
.12	51.720	36.000	156.609	71.022
.14	0.452	1.449	3.185	1.553
.16	1.770	1.869	2.410	2.007
.17	2.826	0.917	3.529	2.711
.18	7.400	11.813	37.500	18.391
.23	0.502	0.321	0.644	0.528
.24	1.727	3.200	10.400	5.473
.25	2.453	0.775	4.348	2.971
.26	5.157	2.303	6.944	5.454
.27	1.926	5.263	19.481	10.064
.28	2.062	1.429	5.435	3.552
7.1	1.423	0.898	2.133	1.693
.3	0.958	3.630	7.795	10.019
5.	0.315	0.633	1.022	0.726
.9	2.203	1.502	4.470	3.332
.14	1.333	0.533	6.289	1.624

图3 鲢鱼种各体征指标及主成分 f_1 的生长比速曲线

化及最大比速出现的时间也是不一致的。因此,用单指标分开来谈鱼类生长比速及同一种鱼在同一生长时期的最大比速就会因采用的指标不同而异。如体高的最大比速在6月6日,全长及体重的最大比速在6月12日。由于全长、体高、体重的增长主要是由主成分 f_1 决定的(f_1 的贡献率达98.43%),用 f_1 的比速来描述、反映鱼类的生长比速应更合理,更能说明问题,这样就避免了单指标分析中无法综合的困难。另外,前两个特征值 λ_1 、 λ_2 的累计贡献率达到99.99%,而第三个特征值与零无显著差异,贡献率几乎是零,说明由三个体征指标经过一次线性组合后所得到的彼此不相关的主成分 f_1 和 f_2 包含了鲢鱼种生长中几乎全部信息。因此,主成分 f_1 和 f_2 是主导鱼种生长的两个数学指标。从图2表1可以看出主成分 f_1 直接引起鲢鱼鱼种的不断增长;而主成分 f_2 为辅助因子,它使鱼种的生长呈现抛物线过程,即先慢后快而后又转慢,我们认为它主要是受某些生长条件综合影响的结果。主成分 f_1 和 f_2 对鱼种生长的联合影响(图4)可剖析为两个阶段:第Ⅰ阶段,其作用有逐渐增强趋势,而第Ⅱ阶段却逐步减弱,增强与减弱的交互作用导致形成拐折,我们把第Ⅰ阶段与第Ⅱ阶段的交汇点称做鱼种生长的转折点或生长特异点。从图2b可以看出,本试验中鲢鱼种生长的转折期出现在六月中旬。前面我们讨论了生长比速,从图3知主成分 f_1 的最大比速出现在6月12日,

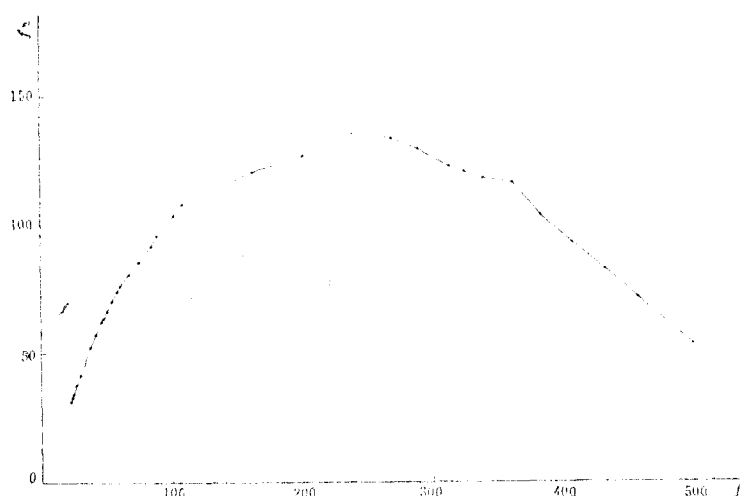


图 4 主成分 f_1 和 f_2 对鲢鱼种生长的联合影响

而生长的转折点发生在 6 月 16 日。因此, 转折点与最大比速有什么关连, 为什么会出现转折点, 鱼类一生中能发生几次转折, 转折点的出现与哪些因素有关, 都有待于进一步探索。

由主成分矩阵通过线性组合后所得到的荷载矩阵反映了鲢鱼种全长、体高、体重间的变化情况。从表 3 图 2 可以分析, 与长度有关的因子荷载量 ρ_{1j} , 其荷载比接近于 1.0, 表明主成分 f_1 和 f_2 对长度增长的作用强度是较一致的。在长度增长大致相同的情况下, 与高度有关的因子荷载量 ρ_{2j} , 其荷载比约为 1.3, 说明主成分 f_1 起增高的作用强度比主成分 f_2 大一些。因此, 当达到生长的转折期时, 鱼体高度的改变就显得明显些, 即鱼体体高的增加要快些。在长度增长和体高增高大致相同的条件下, 与重量有关的因子荷载量 ρ_{3j} , 其荷载比约为 -1.4, 明显地显示影响重量增大的两个因素是负相关, 而主成分 f_1 的作用强度更强于主成分 f_2 , 其作用的效果正好相反。因此, 当鲢鱼种的生长过了转折点后, 鱼体重量的增加就显得非常显著。上述推论与我们在江河湖泊中对鱼类生长所作的实际观测的结论基本一致。

从表 4 中列举的实测值与预估值可以看出: 用本方法通过荷载矩阵对观测值所作的预报, 虽然经过了由数据矩阵、主成分矩阵及荷载矩阵的三次计算, 各次都取了近似值, 但预报的估计量与实测的基本量的实际差别并不大, 因此用本方法来研究鱼类的生长规律是可行的。

总之, 本文运用多元统计中主成分分析的方法对鲢鱼种的生长初步进行了数学和生物学的综合分析, 得到目前研究鱼类生长的较合适的方法。由体征指标全长、体高、体重经过线性组合后得到的主成分 f_1 是左右鱼类生长变化的主要因素, 采用 f_1 的比速来反映鱼类的增长速率不仅避免了在单指标分析中难以克服的困难, 而且统一了标准。在用数学方法揭示出的共同支配全长、体高及体重三者数量增长且又彼此独立的二个主成分 f_1 、 f_2 之中, f_1 直接引起鲢鱼种的不断增长, f_2 则使鱼种的生长呈抛物线过程, 而两者对鱼种的联合影响导致生长中出现转折期。三个体征指标间增长的特点是: 先是长度较快地增长, 当增长到一定大小时, 高度就明显增高, 最后是鱼体重量的大幅度增重。

上述结果对进一步研究鱼类生长、探索鱼类生长期、转折点的成因及用于渔业生产均有

一定的意义。

参 考 文 献

- 陈佩薰等 1965 长江中青鱼的生长速度。水生生物学集刊 5(2):272—281。
复旦大学 1979 概率论。348—365, 人民教育出版社 第二册、第二分册。
Васнецов В. В. 1953 Озакономерностях роста рыб, Очерки по общим вопросам ихтиологии. Изд-во АН СССР, 218—226.
Кузнецов, В. А. 1972 Характер роста личинок и молоди некоторых пресноводных рыб на разных этапах развития. Вopr. ихтиологии 12(3):479—489.
Чугунова, Н. И. 1959 Руководство по изучению возраста и роста рыб, Издательство академии наук СССР:148—154.

**AN APPLICATION OF PRINCIPAL COMPONENT
ANALYSIS TO THE DETERMINATION OF THE
INDICES OF BODY CHARACTERS IN THE
GROWTH OF SILVER CARP
(*HYPOPHTHALMICHTHYS MOLITRIX*) FINGERLINGS**

Hua Yuanyu Hu Chualin Zhang Shuiyuan Chen Shaolian
(*Institute of Hydrobiology, Academia Sinica*)

The growth of fish, like other organisms, is a complicated process, and it is inadequate to describe the feature of growth in terms of the changes of individual characters (such as length and weight). When fish grows, there are increases not only in length and in weight, but also in height and these increases are closely interrelated. Based on the changes of multi-indices of body character, the authors describe the regularity of growth in fingerling silver carp by using the method of principal component analysis and make an integrated analysis, mathematical and biological, on the growth of the fish.

The result indicates that there are two independent factors, principal component f_1 and principal component f_2 , which govern the increases of total length, body height and body weight. The authors consider that the principal component f_1 , obtained from the linear combination of the three indices given above, may demonstrate their changes in an integral way. The description of fish growth by the relative rate of f_1 may avoid the difficulties encountered in single index analysis. Principal component f_1 causes the fingerling to grow incessantly, while f_2 causes the fingerling to grow parabolically. The combined effect of f_1 and f_2 causes the occurrence of a turning period in the course of growth.

The features of the increase of the three indices are as follows,

At first there is a relative rapid increase in length, and when the fingerling reaches a certain length the height of its body will have a conspicuous increase, which is soon followed by a considerable increase in weight. Therefore it is important for fishery production to time the culture management to the turning period of the growth of fingerlings.