第2卷 第1期
1982年3月

生 态 学 报
ACTA ECOLOGICA SINICA

Vol. 2 No. 1
Mar., 1982

单种群增长最简数学模型的一点注释

张 炳 根
(山东海洋学院)

生态学的数学模型中最简单的是只考虑一个种群的生长过程。若假定在瞬时间δt中，每一个体产生的新个体数为$a\delta t$，于是得到描述单个种群增长的数学模型

$$dN = Nadt = aNdt,\ a>0 \tag{1}$$

式中N是时间t时种群的个体数，而a为内禀（Intrinsic）增长率，这方程的解为

$$N = N_0 e^{at} \tag{2}$$

这个模型实际上有两个前提（史密斯，1979）：

1. 它假定了种群为无限大，即 N_0 充分大；
2. 它忽略了环境中随时间而出现的随机波动。

考虑到环境的随机性，May (1971)提出简单的随机数学模型

$$\frac{dN}{dt} = [a + Y(t)]N \tag{3}$$

其中$Y(t)$是均值为零的白噪声，方程(3)是一阶Ito随机微分方程(Arnold, 1974)，正确的写法是

$$dN = aNdt + NdB(t) \tag{4}$$

其中$B(t)$是维纳随机过程，假定$E\{B(t)\} = 0$，$E\{(dB)^2\} = \sigma^2 dt$（书〔1〕中把$\sigma^2$说成为白噪声$Y(t)$的方差是错误的，连续型白噪声没有有限方差）。

方程(4)的解过程为

$$N(t) = N_0 e^{(a-\sigma^2/2)t + B(t) - B(o)} \tag{5}$$

这不难用It_0微分法则验证，当$t\to\infty$时$B(t)$以概率1至多与$\sqrt{2tlnlnt}$同阶，因而，当$\sigma^2 > 2a$时，以概率1发生$N(t)\to 0$，即t趋于无穷时种群灭种的概率趋于1，但种群的平均值

$$E\{N(t)\} = N_0 e^{at} \tag{6}$$

即一方面种群的平均值以指数增长，另一方面种群以概率1会灭种，史密斯称这一现象为奇特的结论（史密斯，1979），他还指出环境波动用白噪声描述是有缺陷的，因为它意味着环境的随机波动在时间前后顺序上是毫不相关的，显然，任何真实系统都不是这样的。

鉴于上述情况，我们在这里提出一个似乎更为合理的随机模型

$$\frac{dN}{dt} = [a + X(t)]N \tag{7}$$

假设方程(7)中$X(t)$是均值为零，相关函数为

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\alpha|} \tag{8}$$

的高斯平稳随机过程，通常在我们观察的时段内形成环境的诸因素没有特别的异常变化，假

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定是平稳随机过程是合适的。

这时，方程(7)的解过程为

$$N(t)=N_0e^{at}+\int_0^t X(\tau)d\tau \tag{9}$$

因为$X(t)$是高斯过程，$\int_0^t X(\tau)d\tau$ 也是高斯过程，且

$$E\{\int_0^t X(\tau)d\tau\}=0$$

$$E\{e\int_0^t X(\tau)\,d\tau\}=e\frac{1}{2}E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\} \tag{10}$$

由(9)式，得

$$E\{N^m(t)\}=N_0^m E\{e^{amt}+m\int_0^t X(\tau)d\tau\} \tag{11}$$

于是，平均值为

$$E\{N\}=N_0e^{at}E\{e\int_0^t X(\tau)\,d\tau\} \tag{12}$$

但

$$E\{(\int_0^t X(\tau)\,d\tau)^2\}=\int_0^t\int_0^t R(s_1-s_2)ds_1ds_2$$

$$=2\int_0^t(t-\tau)R(\tau)d\tau$$

因为

$$\int_0^t R(\tau)d\tau=\frac{\sigma^2}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}]$$

$$\int_0^t\tau R(\tau)d\tau=-\frac{\sigma^2}{\alpha}\left[te^{-\alpha t}-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]$$

于是平均值为

$$E\{N\}=N_0exp\left(\alpha t+\frac{\sigma^2}{\alpha}\left(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right)\right) \tag{13}$$

〔读者欲了解这里一些推导的细节，可参考张炳根等(1980)〕，注意到指数的级数展开式

$$e^{-\alpha t}=1-\alpha t+\frac{\alpha^2t^2}{2!}+\cdots\cdots$$

若采用近似式

$$e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$$

即得

$$E\{N\}\approx N_0exp(at)$$

计算N的方差

$$V_{ar}(N)=E\{N^2\}-(E\{N\})^2$$

$$E\{N^2\}=N_0^2e^{2at}E\{e^2\int_0^t(X\tau)d\tau\}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

但

$$E\{e^{2\int_0^t X(\tau)d\tau}\} = e^{2E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\}}$$

$$Var(N) = N_0^2 e^{2at} e^{2E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\}} - N_0^2 e^{2at} e^{E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\}}$$

$$= N_0^2 e^{2at} e^{E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\}}[e^{E\{(\int_0^t X(\tau)d\tau)^2\}} - 1]$$

$$= N_0^2 e^{2at + \frac{2\sigma^2}{\alpha}\left(t - \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right)}\left[e^{\frac{2\alpha^2}{\alpha}\left(t - \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right)} - 1\right] \tag{14}$$

变异系数

$$(Var(N))^{\frac{1}{2}}/E\{N\} = \left[e^{\frac{2\sigma^2}{\alpha}\left(t - \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

若采用近似式 $e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$，则有 $Var(N)\approx 0$。

现在对我们提出的模型（7）作如下注释：

1. 从生态的环境的随机波动的实际情况出发，May 提出的模型只能近似代表很少一部分真实情况，而我们提出的模型（7）可以代表相当一部分其它的真实情况，也就是本文是上述May工作的一个补充和扩充。

2. 我们的模型（7）是一种有色噪声模型与May提的白噪声模型（3）有本质的不同。

受有色噪声扰动的系统（7），种群的平均值增长将比未扰动的情况增长快，而白噪声扰动的模型（3），平均值的增长与未扰动的情况相同，而且有色噪声比白噪声带来更大的变异性。

3. 若用近似关系 $e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$，则种群的变动与未受扰动时一致，几乎确定性地按指数增长，短时间内种群按指数增长已为若干实验所证实。

4. 若模型（7）中，令 $\sigma^2\to\infty$，$\alpha\to\infty$ 又 $\sigma^2/\alpha\to\pi s_0$，这时 $X(t)$ 趋向于谱密度等于 S_0，相关函数为 $R_y(\tau)=2\pi s_0\delta(\tau)$ 的高斯白噪声，这时(13)式变成

$$E\{N\} = N_0 exp(at + \pi s_0 t) \tag{16}$$

即噪声 $X(t)$ 趋向于谱密度为 S_0 的白噪声，但(16)式与 May 的模型（3）得到的（6）不符，怎么来解释这个现象呢？情况是这样的，如果摸拟种群变动的生态模型为（7）式，只是噪声 $X(t)$ 具有较宽的平直频带，为了简化计算直接在方程（7）中用具有常数谱密度的白噪声 $Y(t)$ 来代替 $X(t)$，从而用模型（3）代替模型（7），这种做法形式上看是合理的，但实际上是错误的，因为方程（3）和方程（7）属于有本质不同的两类随机微分方程，不能用简单的直接替代来变换（*Arnold*, 1974）。

也就是说，若模型（7）中 $X(t)$ 有宽的频带想用白噪声近似它，不能直接用（3）代替（7）而应该用

$$dN = (a+\pi s_0)Ndt + NdB(t) \tag{17}$$

来代替（7），其中 s_0 是所用的白噪声 $Y(t)$ 的谱密度值，$B(t)$ 是维纳随机过程 $E\{dB\}=0$，$E\{(dB)^2\}=\sigma^2 dt$，$\pi s_0=\sigma/\alpha$，模型(17)才是宽带有色噪声模型（7）的近似。

5. 模型（7）与模型（3）当 $t\to\infty$ 时的性质也有本质的不同，从相关函数的性质（8）知，模型（7）中随机过程 $X(t)$ 的均值有各态历径性（张炳根等，1980），也就是对 $X(t)$ 的

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

几乎所有样本函数有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(\tau)\,d\tau=0$$

因而，从(9)式得知只要 $a>0$，解过程 $N(t)$ 以概率1指数地发散，而对模型(3)以概率1有 $N(t)\to 0$。

参 考 文 献

张炳根、赵玉芝 1980 科学与工程中的随机微分方程。海洋出版社。

J. M. Smith 1979 生态学模型。科学出版社。

L. Arnold 1974 Stochastic differential equations theory anb applications. gohn wiley. New York.

A NOTE ON A SIMPLEST GROWTH MODEL OF SINGLE-SPECIES POPUTATION

Zhang Binggen

(Shandong College of Oceanology)

In this paper we have reviewed the simplest stochastic growth model of single-species population

$$dN=aNdt+NdB \tag{3}$$

where $B(t)$ is a wiener process. It was obtained by May

we considered the other stochastic growth model

$$\frac{dN}{dt}=[a+X(t)]N(t) \tag{7}$$

where $X(t)$ is a Gaussian stationary process.

We have analysed and compared their character and relation.

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.