

具有食饵自身抑制作用的Volterra 方程的极限环解

易希璋

(山东大学光学系)

刘嘉欣

(南开大学物理系)

一、引言

在捕食者与食饵相互作用的生态数学模型中,比较典型的是Volterra模型(E.C. 皮洛, 1978)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - cxy \\ \frac{dy}{dt} &= -ey + c'xy\end{aligned}\quad (1)'$$

其中 x, y 分别为食饵密度与捕食者密度(即每单位面积内的个体数), a 为食饵内禀增长率, e 为捕食者死亡率, c', c 分别是捕食者与食饵的相互作用项系数。在生态学意义下这些量都取正值。但是(1)'具有生态学意义的定态解, $X_0 = e/c', y_0 = a/c$ 是相平面上的中心点(图1), 它并不是渐近稳定的。另一方面, 利用随机方法得到的方差(Nicolis, 1977): $\langle(\delta x)^2\rangle, \langle(\delta y)^2\rangle$ 均随时间无限增大。因此对应于宏观定态(x_0, y_0)的均值 $\langle x\rangle, \langle y\rangle$ 失去意义, 为了排除这种困难, 通常在(1)'中引入食饵的所谓“自抑制”项 $-bx^2(b>0)$,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bx^2 - cxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -ey + c'xy,\end{aligned}\quad (1)$$

由于自抑制项的“阻尼”作用使捕食种与食饵种皆为收敛振荡型(CO型)(J.M.史密斯, 1979), 这时在相平面中相应的定态

$$x_0 = \frac{e}{c'}, y_0 = \frac{a}{c} - \frac{be}{cc'},\quad (2)$$

是渐近稳定焦点, 如图(2)。由于 y_0 必须是正的, 因此有

$$\frac{a}{c} - \frac{be}{cc'} > 0 \text{ 或 } \frac{a}{b} > \frac{e}{c'}\quad (3)$$

另一方面, 自抑制项也反映了密度制约与环境资源的有限性。已经看到, 利用这种方法可以产生渐近稳定的定态解。作为一种初步的探讨, 本文采用了另一种方法, 结果表明, 同样可以获得某种具有数学生态学意义的解。

假设可以存在 $b>0$ 情况, 这相当于在(1)'中引入“反抑制(自催化)作用项。这时

在相平面上相应于 (2) 的定态点是不稳定焦点, 如图 3。显然它不具有生态学意义。但是按照 Poincare-Hopf 的分支理论 (Nicolis, 1977)。当 b 从 “+” $\Rightarrow$ “0” $\Rightarrow$ “-” 时, 定态 (x_0, y_0) 将从渐近稳定焦点 $\Rightarrow$ 中心点 $\Rightarrow$ 不稳定焦点。因此在某种条件下将出现极限环状态, 它不同于 $b < 0$ 时的不稳定焦点。这个具有重要数学生态学意义的解已被通常的解法忽略掉。

按分支点理论的程序, 本文第二节利用线性稳定性分析方法证明极限环分支解的存在性, 第三节给出这种极限环解的近似表示式, 第四节是本文的结果与对这些结果的讨论。

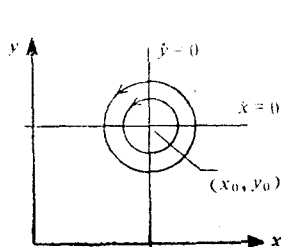


图 1 没有食饵自抑制作用 ($b=0$)

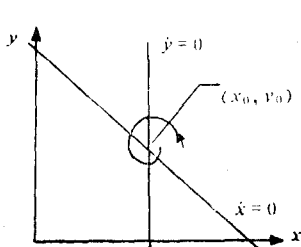


图 2 具有食饵自抑制作用 ($b>0$)

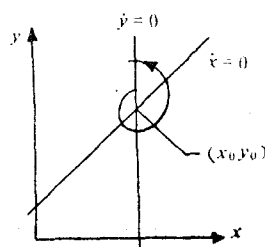


图 3 具有食饵反抑制作用 ($b<0$)

二、极限环分支解的存在性

线性稳定性分析理论通常是假设 (Nicolis, 1977):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x} + x_0 \\ \hat{y} &= \hat{y} + y_0 \end{aligned} \quad (4)$$

$\hat{x}, \hat{y}$ 是在定态 x_0, y_0 上的微扰, 令

$$\begin{aligned} \hat{x} &= X e^{\lambda t}, \\ \hat{y} &= Y e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (5)$$

X, Y, λ 是与 t 无关的常数, $|X| \ll |x_0|, |Y| \ll |y_0|$ 。将 (4) 与 (5) 代入 (1), 并且仅保留到 X, Y 的一次项, 与成矩阵形式,

$$\lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2bx_0 - cy_0 & -cx_0 \\ c'y_0 & -e + c'x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

(6) 为本征型方程, 其中 λ 是与本征矢量 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 相应的本征值, 本征值为,

$$\lambda^{(\pm)} = -\frac{be}{2c'} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}, \quad (7)$$

$$\Delta = \frac{b^2 e^2}{c'^2} - 4 \left(ea - \frac{be^2}{c'} \right), \quad (8)$$

由 (3) 可得到 $4 \left(ea - \frac{be^2}{c'} \right) > 0$, 当 b 变化时使 $\Delta < 0$ 的区域, $b_1 < b < b_2$, 如图 4, 其中

$$b_1 = -2c' \left[\sqrt{1 + 4 \frac{a}{e}} + 1 \right], \quad b_2 = 2c' \left[\sqrt{1 + 4 \frac{a}{e}} - 1 \right].$$

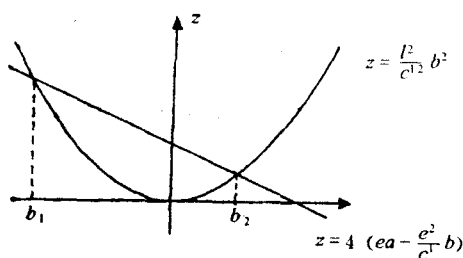


图 4

在这个区域中有:

$$\operatorname{Im} \lambda^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta} \neq 0,$$

$$\operatorname{Re} \lambda^{(\pm)} = -\frac{be}{2c'} < 0, \text{ 当 } b > 0.$$

$$\operatorname{Re} \lambda^{(\pm)} = -\frac{be}{2c'} = 0, \text{ 当 } b = 0.$$

$$\operatorname{Re} \lambda^{(\pm)} = -\frac{be}{2c'} > 0, \text{ 当 } b < 0.$$

因此 $b=0$ 为分支点, 在这一点上将出现极限环分支解

三、极限环分支解的近似表示式

非线性微分方程(1)的一般极限环分支解可由计算机作出, 为了探讨其结果, 下面采用近似方法求解。既然已知方程(1)存在极限环解, 因此可将其表示成收敛的广义富氏级数(M. J. 莱特希尔, 1965);

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} e^{in\Omega t}, \quad (9)$$

Ω 为极限环的角频率, 为了确定系数 x_n, y_n , 将(9)代入(1), 利用函数组 $e^{in\Omega t}$ 的正交性得到 $n=0$;

$$0 = ax_0 - b \left(x_0^2 + 2 \sum_1^{\infty} x_n x_{-n} \right) - c \left(x_0 y_0 + \sum_1^{\infty} x_n y_{-n} + \sum_1^{\infty} x_{-n} y_n \right),$$

$$0 = -ey_0 + c' \left(x_0 y_0 + \sum_1^{\infty} x_n y_{-n} + \sum_1^{\infty} x_{-n} y_n \right),$$

$n=1$,

$$i\Omega x_1 = ax_1 - b \left(2x_0 x_1 + 2 \sum_1^{\infty} x_{n+1} x_{-n} \right) - c \left(x_1 y_0 + x_0 y_1 + \sum_1^{\infty} x_{n+1} y_{-n} + \sum_1^{\infty} x_{-n} y_{n+1} \right),$$

$$i\Omega y_1 = -ey_1 + c' \left(x_1 y_0 + x_0 y_1 + \sum_1^{\infty} x_{n+1} y_{-n} + \sum_1^{\infty} x_{-n} y_{n+1} \right),$$

$n=-1$;

$$\begin{aligned}
 -i\Omega x_{-1} &= ax_{-1} - b\left(2x_0x_{-1} + \sum_1^{\infty} x_{n+1}x_{-n}\right) - c\left(x_{-1}y_0 + x_0y_{-1} + \sum_1^{\infty} x_{-n-1}y_n + \sum_1^{\infty} x_ny_{-n-1}\right), \\
 -i\Omega y_{-1} &= -ey_{-1} + c'\left(x_{-1}y_0 + x_0y_{-1} + \sum_1^{\infty} x_{-n-1}y_n + \sum_1^{\infty} x_ny_{-n-1}\right),
 \end{aligned}$$

若考虑一次修正项（一次谐波），上式可写成 $n=0$;

$$\begin{aligned}
 n=0, \quad 0 &= ax_0 - bx_0^2 - cx_0y_0, \\
 0 &= -ey_0 + c'x_0y_0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

$n=1$;

$$\begin{aligned}
 i\Omega x_1 &= ax_1 - 2bx_0x_1 - c(x_1y_0 + x_0y_1), \\
 i\Omega y_1 &= -ey_1 + c'(x_1y_0 + x_0y_1),
 \end{aligned} \tag{11}$$

$n=-1$;

$$\begin{aligned}
 -i\Omega x_{-1} &= ax_{-1} - 2bx_0x_{-1} - c(x_{-1}y_0 + x_0y_{-1}), \\
 -i\Omega y_{-1} &= -ey_{-1} + c'(x_{-1}y_0 + x_0y_{-1}),
 \end{aligned} \tag{12}$$

由于(10)是零次近似结果，它就是定态解(2)。(11)与(12)可写成

$$i\Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$-i\Omega \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

既然解是近似的，这里只能探讨 $|b| \simeq 0$ 的情况。由于(13)与(14)相互共轭， $x_1^* = x_{-1}$ ， $y_1^* = y_{-1}$ ，因此仅需求解其中一个方程。例如(13)，其本征值为

$$\Omega^{(\pm)}(b) \simeq \Omega^{(\pm)}(0) = \pm \sqrt{ea}$$

$\sqrt{ea}$ 为极限环的近似角频率，对应于 $\Omega^{(+)}(0) = +\sqrt{ea}$ 的本征矢量为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

对应于 $\Omega^{(-)}(0) = -\sqrt{ea}$ 的本征矢量为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_{-1}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_{-1}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\gamma_1 = \frac{(ac' - be)^2}{c^2 ea}, \quad \gamma_{-1} = \frac{ac'^2 + b^2 e}{c^2 e}.$$

这里利用了归一化条件：

$$|x_1|^2 + |y_1|^2 = |x_{-1}|^2 + |y_{-1}|^2 = 1,$$

将(15)代入(9)得到分支解的一个分支的近似表示式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix} e^{i\sqrt{ea}t} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{ea}t} \equiv \begin{pmatrix} x^{(+)} \\ y^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

将(16)代入(9)得到分支解的另一分支的近似表示式:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_{-1}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{ea}t} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_{-1}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix} e^{i\sqrt{ea}t} \equiv \begin{pmatrix} x^{(-)} \\ y^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

四、结果与讨论

1. 上述结果表明, 当系统中食饵的自抑制作用改变为反抑制作用时 ($b>0$ 改变为 $b<0$), 系统原来的渐近稳定状态将失去它的稳定性, 同时产生两个新的状态(分支), 它们都是具有确定频率的极限环过程, 角频率 $\omega = \sqrt{ea}$ 随 e 或 a 的增大而增加。

2. 在反抑制作用下($b>0$), 系统究竟处于两个可能状态(分支)中的哪一个态? 这是一种随机过程, 不可能利用决定论方法来回答 (Nicolis, 1977)。

参 考 文 献

- 卢泽愚译 1978 数学生态学引论. 科学出版社.
 J. M. 史密斯 1977 生态学模型. 科学出版社, 19—22.
 M. J. 莱特希尔 1965 富里叶分析与广义函数引论. 科学出版社, 62—72.
 Nicolis, G. and I. Prigogine 1977 Self-Organization in Nonequilibrium Systems.

THE LIMIT CYCLE SOLUTION OF PREY-PREDATOR EQUATION WITH SELF-RESTRAINT EFFECT

Yi Xizhang

Liu Jiabin

(*Shandong University*) (*Nankai University*)

Using bifurcation theory the property of solution of Volterra prey-predator equation with self-restraint term is discussed. The results show that if the sign of coefficient in restraint term is allowed to vary, then $b=0$ is a bifurcation point. At this point will create the bifurcation solution of limit cycle. But this solution had been omitted in usual way.