

应用系统理论的方法 建立套作玉米系统的数学模型*

齐文虎 李立贤 倪建华

(中国科学院自然资源综合考察委员会)

一、前言

目前,系统理论越来越广泛地深入地应用到各个科学研究和生产领域,甚至社会科学的范围。通常我们最简单地用一个方框图表示一个系统(图1)。

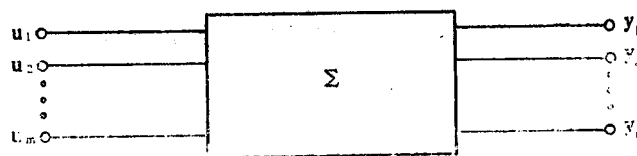


图1 一般的系统框图

系统是由一些按一定的关系联系起来“元件”组成并实现某种功能的一个整体。我们有时把物理实体 Σ 视为“暗箱”。(u_1, u_2, \dots, u_m)是加到系统上的 m 个输入量, (y_1, y_2, \dots, y_n)是系统的 n 个输出量。严格地说,系统是指物理实体连同其输入和输出而言。我们之所以视为“暗箱”,是因为有时系统理论所要研究的或者说我们主要关心的是由输入量到输出量的变换,也就是说系统的作用是由输入量加工处理后变为输出量。至于各个“元件”的结构则不是我们关心的。

最初,“系统”是人们为了实现在生产或生活中的某种要求而创造的一种装置,我们可以把它叫作“人造”的系统。随着工业生产的发展,人们对工业产品的要求越来越高,这就逐渐形成和逐步完善了一套用于分析和综合各种类型的系统的概念和方法。特别应当提出的是,只是由于近代数学的高度发展,才使得这些研究的迅速进展成为可能。从这个意义来说,系统理论就是用数学分析的手段研究系统规律的方法。

由于近代数学不断提供丰富的营养,使得运用系统理论或系统方法解决复杂系统的问题的成果大量涌现。所以越来越多的科学工作者逐步认识到,现代科学技术革命最重要的特征之一是把系统方法广泛地应用于各个科研领域。

生态系统,它不同于上述的“人造系统”。它是由多个“元件”或“分室”组成的复杂的“自然”系统,它的每个“元件”的内部结构往往是未知的,或者是短期内还难于揭示的。因此,用一些传统的方法研究,特别是定量地研究生态系统的内在规律,面临着极大的困难。而系统理论允许对那些内部机理还不清楚,而通过实际观测能确定它们的输入和输出关系的可观测系统进行研究。因此,使我们运用为研究“人造”系统而发展起来的系统理论

* 本文承阳含照、楼格、韩湘玲先生指导,深表谢意。

来解决“自然”系统的问题成为可能。

本文的目的是利用系统理论的方法建立套作玉米系统的一组数学模型。我们对套作玉米系统作了一些假定后，得到一个单输入、单输出，具有反馈的线性非时变的连续系统的模型。利用这个模型，可以根据太阳辐射值计算套作玉米的产量及研究套作的各茬作物之间互相的遮光效应，使我们可以定量地分析、比较各种套作方式的效果。

二、套作玉米生态系统

我国地大物博，人口众多，但是可耕地对人口数量的比例很小。因此，提高农作物单位面积产量是提高粮食产量的一条重要途径。农作物的生长过程实际上是一种在一定长的时间过程中物质转换过程，农作物吸收肥料、水、空气，通过光合作用转换成根、杆、叶、果实等等。在完成这种转换过程中，光能是必不可少的，而且是不需成本的能源。所以充分利用光能这种自然资源，是提高农作物单位面积产量的经济实惠的办法。在这种意义上来说，提高单位面积土地上的复种指数是提高农作物单位面积产量的一种有效措施。但提高复种指数，或者说是实行间套作，势必造成各茬作物之间的争光、争水、争肥等问题。为解决这些问题就产生了各种不同的套作方式（如4.5尺畦，7.5尺畦）。因此，研究不同套作方式及其效果成为农业科研的重要问题。

本文讨论的对象是房山县的二茬及三茬玉米及其生长环境因素构成的套作玉米生态系统，这个系统的方框图如图2所示。

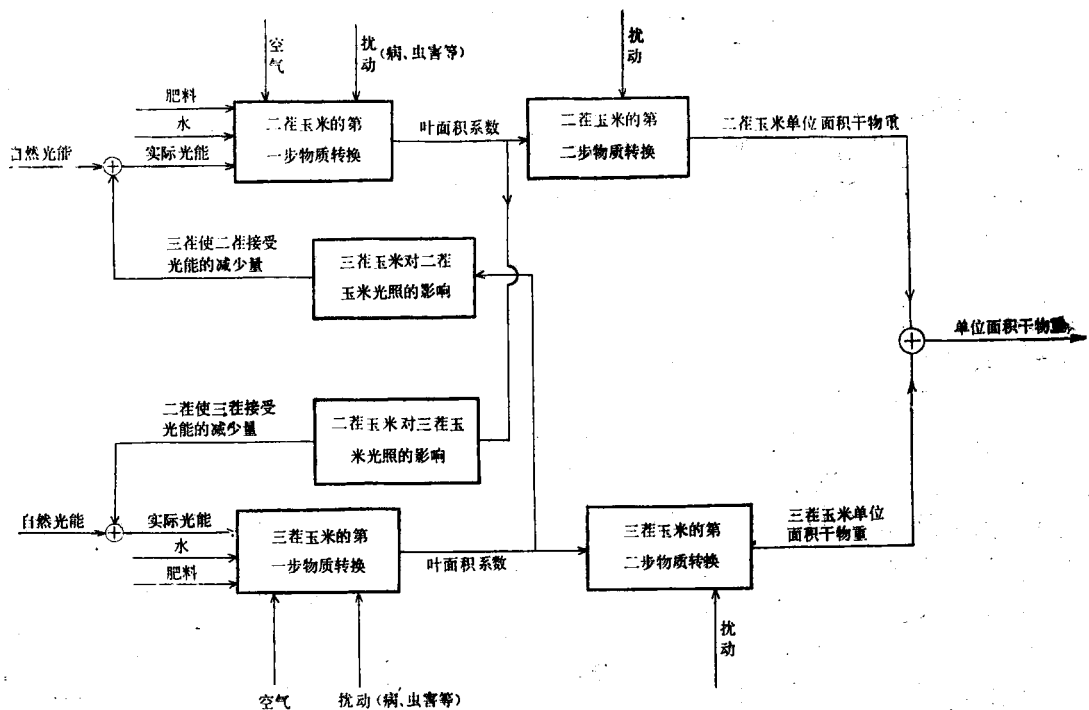


图2 套作玉米系统框图

这里的自然光能、叶面积系数、玉米的干物重以及二（三）茬玉米使三（二）茬玉米受光能减少量都是随时间变化的量，即它们都是时间的函数。我们可以看出这是一个多输入

(肥料、水、空气、光能等) 单输出 (单位面积上干物重) 的具有反馈 (二、三茬之间光能接受量的相互影响) 及扰动的动态系统。

因为我们研究的主要问题是两茬作物的光能利用及相互影响, 而且在同一块土地上的两茬作物的肥、水条件可以认为是相同地得到充足供给的。因此, 将肥料、水、空气等输入及扰动均略去, 这样套作生态系统就成为一个具有单输入单输出的系统 (见图 3)。其中,

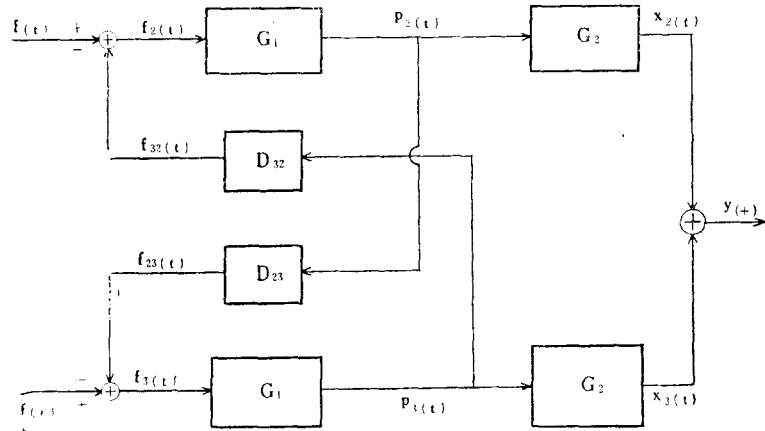


图 3 简化后的套作玉米系统

$f(t)$ ——自然光日总辐射值, $p_2(t)$ ——二茬玉米叶面积系数, $p_3(t)$ ——三茬玉米叶面积系数, $x_2(t)$ ——二茬玉米干物重, $x_3(t)$ ——三茬玉米干物重, $f_{32}(t)$ ——二茬玉米由于三茬玉米的叶子的影响, 使二茬玉米接受光辐射的减少量 (绝对值), $f_{23}(t)$ ——三茬玉米由于二茬玉米叶子的影响, 使三茬玉米接受光辐射的减少量 (绝对值)。实际上, $f_{32}(t)$ 及 $f_{23}(t)$ 包括了株高影响的因素。 $f_2(t)$ ——二茬玉米的实际的光辐射输入量, $f_3(t)$ ——三茬玉米的实际的光辐射输入量。整个系统的输入为 $f(t)$, 输出为 $y(t)$ ——单位面积的干物总重量。 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 为系统的状态函数。

三、套作玉米系统的数学模型

为了建立该系统的数学模型, 我们作如下两个假定:

1. 为了简便而且在实际上对于研究这样的对象所要求的精确性已足够满足, 我们假定系统是线性的。线性系统的最重要的特性是可以使用叠加原理, 也就是说几个不同的输入函数作用到线性系统, 其输出函数等于各个输入函数单独作用的结果之和。一般, 描述单输入、单输出的线性系统的动态特性的微分方程可写成如下形式:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = u(t)$$

对于上述套作玉米系统 $u(t) = f(t)$ 。因为系统是线性的, 我们可以将 $f(t)$, 也就是将太阳辐射值随时间变化的函数, 分解为几个初等函数之和, 从而使我们的问题的解决过程大大简化。

2. 系统的非时变性。这是指系统本身的特性。具体地说是由描述此系统的微分方程的所有系数 (a_0, a_1, \dots, a_n) 表现出来的, 在非时变的情况下这些系数不随时间变化。因此, 系统

的输入函数和状态函数可以在时间坐标轴上同时平移。在我们的实际问题里，这个平移不能很大，因为若平移太大将使后一茬作物不能收获；另外，由于时间平移，作物所经历的气温条件是不同的，所以我们对套作玉米系统所作的非时变化的假设是一种可以接受的近似。在这些假定下，我们就有理由说反映二茬和三茬玉米特征的微分方程是相同的，或者说可以用同一个微分方程描述它们的生长过程。

作了上述假定后，我们就可以利用线性非时变系统的有关理论建立系统的数学模型。对线性非时变系统的微分方程可以施行拉普拉斯变换，其结果是将一个常系数线性微分方程变为一个高次代数方程，从而可以求出系统的传递函数。传递函数是独立于系统的输入函数的反映系统特性的函数。

实函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的定义为：

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

这里 $s = \sigma + j\omega$, $j = \sqrt{-1}$

若一个线性非时变系统的微分方程是：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{i-1} y^{(i)} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + b_{m-1} u^{(1)} + b_m u \dots \dots (1)$$

($n \geq m$)

式中 y 是系统的输出函数， u 是系统的输入函数，假定初始条件为零，对方程两边进行拉普拉斯变换得到：

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{i-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s) \dots \dots (2)$$

由此可得：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_{i-1} s + a_n}$$

我们称 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \dots \dots (3)$ 为系统的传递函数。

当我们知道某系统的特性，即给出系统的传递函数 $G(s)$ 后，若已知加到系统的输入函数 $u(t)$ ，就可以对其进行拉普拉斯变换得到 $U(s)$ ，利用(3)式求出 $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ ，然后对 $Y(s)$ 进行拉普拉斯反变换，即可求得 $y(t)$ 。理论上，

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds$$

($t > 0$)

式中的 c 为实常数，它大于 $Y(s)$ 所有奇点的实部的最大者。

四、数学模型的求解方法

为表达玉米由光辐能量到叶面积及干物重的转换特性，根据上一节的分析，我们可以利用平作玉米的 $p(t)$ 和 $x(t)$ 与 $f(t)$ 的关系。

首先我们要求出 $f(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x(t)$ 的拉普拉斯变换。但是，因为它们的变换结果中包含有参变量 s ，尽管我们可以借助于电子计算机进行数值计算，但是它只能得到以 σ 和 ω 的离散值为参量的大量数字结果，而无法得到 $F(s)$ 的解析表达式，使我们很难甚至无法利用这

个结果, 故我们采用根据实测的 $f(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x(t)$ 的特性用初等函数组合逼近的方法。另外, 图 3 所示为 $f(t)$ 到 $p(t)$ 到 $x(t)$ 的能量转换, 应当量纲一致, 但我们仅考虑它们之间的数量关系, 所以对由量纲变换所引起的比例因子, 在这里不予考虑。我们从太阳辐射规律知道, 表示其辐射值 (卡/日) 的 $f(t)$ 是个随机函数。一般是测它的离散值, 为便于进行变换, 我们取其旬平均值并拟合成光滑曲线。并记作 $f(t)$ (见图 4)。

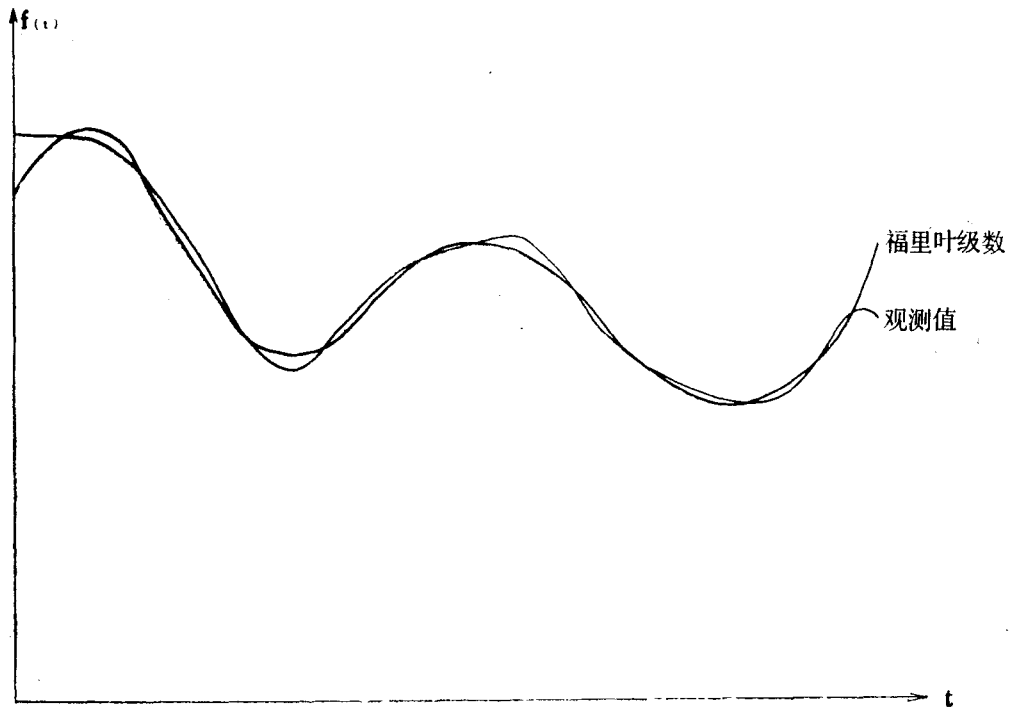


图 4 $f(t)$ 的拟合曲线

时间区间: $t=0$ 表示 6 月 25 日, $T=81$ 表示 9 月 13 日。我们可以将 $f(t)$ 展开成富里叶级数:

$$\text{令 } f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^4 (\alpha_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\text{其中 } \omega = \frac{2\pi}{T}, T = 81 \text{ (日)}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

计算结果

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 384.5431, \\
 a_1 &= 25.04454, & a_2 &= 51.77932, \\
 a_3 &= -6.61459, & a_4 &= -0.46729, \\
 b_1 &= 49.44073, & b_2 &= 70.15732, \\
 b_3 &= 11.74559, & b_4 &= -2.40872,
 \end{aligned}$$

这里取的 $n=4$ ，已足够精确，而项数过多，将会使结果的分析表达式变得非常复杂。因为拉普拉斯变换是一种线性变换，可以利用叠加原理求得：

$$\begin{aligned}
 L[f(t)] &= L\left[a_0 + \sum_{n=1}^4 (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\right] \\
 &= \frac{a_0}{s} + \sum_{n=1}^4 \frac{a_n s + b_n (n\omega)}{(n\omega)^2 + s^2} \\
 &= P(s)
 \end{aligned}$$

其次，可以认为 $p(t)$ 和 $x(t)$ 是 t 的连续函数，并表成 t 的多项式。

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_0 + p_1 t + p_2 t^2 \\
 x(t) &= r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + r_3 t^3
 \end{aligned}$$

根据6月25日到9月13日的81天的实测值用多元回归方法拟合，仍记作 $p(t)$ 及 $x(t)$ ，其结果如下：

$$\begin{aligned}
 p_0 &= -0.39729 & r_0 &= 60.20348 \\
 p_1 &= 0.06277 & r_1 &= -1.88536 \\
 p_2 &= -0.00001 & r_2 &= 0.72299 \\
 & & r_3 &= -0.00539
 \end{aligned}$$

$p(t)$ 的拟合曲线在 t 较小时出现了负值，显然与实际不符，但在 $10 \leq t \leq 81$ 部分拟合曲线与实际观测曲线的接近程度已足够满意。若增加多项式的项数，使得曲线整个的接近程度改善，将会使其结果大大复杂化。况且我们最关心的是其最后状态，所以取三项已经够用。对 $x(t)$ 也用类似的方法处理（详见表1、2）

表1 叶面积系数曲线数据

系统序号	系统特性	P_0	P_1	P_2
一	4.5尺畦二茬	-0.13408	0.12920	-0.00144
	4.5尺畦三茬	0	0	0
二	7.5尺畦二茬	-0.20120	0.12339	-0.00155
	7.5尺畦三茬	-0.08449	0.00938	0.00079
三	10尺畦二茬	-0.21316	0.13748	-0.00199
	10尺畦三茬	-0.18415	0.02809	0.00020
四	15尺畦二茬	-0.28270	0.12290	-0.00194
	15尺畦三茬	-0.39533	0.06530	-0.00048

表 2 干物重曲线数据

系统序号	系 统 特 性	v_0	v_1	v_2	v_3
一	4.5尺二茬	21.76141	2.59264	0.62848	-0.00587
	4.5尺三茬	0	0	0	0
二	7.5尺二茬	16.85846	0.55439	-0.00577	0
	7.5尺三茬	17.57448	-3.56952	0.20238	-0.00131
三	10尺二茬	12.34840	1.78244	0.39406	-0.00387
	10尺三茬	39.13955	-7.72438	0.37219	-0.00269
四	15尺二茬	11.45231	0.33588	0.32774	-0.00324
	15尺三茬	38.36486	-7.84412	0.42941	-0.00300
	平 作	60.20348	-13.88536	0.72299	-0.00539

根据多项式函数的拉普拉斯变换公式, 得到:

$$P(s) = \frac{p_0}{s} + \frac{p_1}{s^2} + \frac{2p_2}{s^3}$$

$$X(s) = \frac{v_0}{s} + \frac{v_1}{s^2} + \frac{2v_2}{s^3} + \frac{6v_3}{s^4}$$

因此可求出平作玉米系统从光辐射到叶面积和从叶面积到干物质的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{P(s)}{F(s)} = \frac{\frac{p_0}{s} + \frac{p_1}{s^2} + \frac{2p_2}{s^3}}{\frac{a_0}{s} + \sum_{n=1}^4 \frac{a_n s + b_n(n\omega)}{(n\omega)^2 + s^2}}$$

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{\frac{v_0}{s} + \frac{v_1}{s^2} + \frac{2v_2}{s^3} + \frac{6v_3}{s^4}}{\frac{p_0}{s} + \frac{p_1}{s^2} + \frac{2p_2}{s^3}}$$

$$= \frac{v_0 s^3 + v_1 s^2 + 2v_2 s + 6v_3}{s(p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2)}$$

显然, 平作玉米系统是由太阳辐射到叶面积指数到干物质的串联系统, 即由 $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 组成的串联系统, 我们可以将其简化成 (图 5)

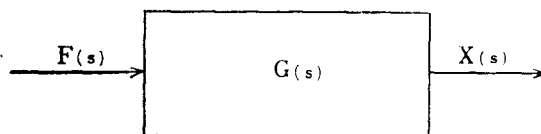


图 5 平作玉米系统

则由太阳辐射能转换成干物质的整个平作玉米系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{P(s)} \cdot \frac{P(s)}{F(s)} = G_2(s) \cdot G_1(s)$$

五、两茬玉米接受光能的相互影响

在实际工作中，往往要求知道套作玉米系统中二茬（或三茬）玉米对三茬（或二茬）玉米接受光能的影响，也就是要求知道 $f_{32}(t)$ 和 $f_{23}(t)$ ，或者是二茬及三茬玉米接受光能的实际值， $f_2(t) = f(t) - f_{32}(t)$ 及 $f_3(t) = f(t) - f_{23}(t)$ 。通过实际观测，很容易得到太阳辐射 $f(t)$ 曲线，但是很难直接测量 $f_2(t)$ 和 $f_3(t)$ 。为此，我们需要求出套作玉米系统中反映两茬玉米间争光关系的 $D_{23}(s)$ 及 $D_{32}(s)$ 。由于我们已经求出了平作玉米系统的传递函数，并且我们已经作了玉米系统是非时变的假设，也就是说对于不同播种时间的二茬及三茬玉米系统的特性是相同的，即它们的传递函数是一样的，所以有

$$\frac{P_2(s)}{F_2(s)} = G_1(s), \quad \frac{P_3(s)}{F_3(s)} = G_1(s)$$

(见图2)。

$$\begin{aligned} \text{式中 } P_2(s) &= L[p_2(t)], & P_3(s) &= L[p_3(t)], \\ F_2(s) &= L[f_2(t)], & F_3(s) &= L[f_3(t)]. \end{aligned}$$

$p_2(t)$ 和 $p_3(t)$ 是由实际观测得到的。于是，我们可以用下述方法求得传递函数 $D_{32}(s)$ 及 $D_{23}(s)$ 。

$$\text{因为 } f_{32}(t) = f(t) - f_2(t)$$

$$\text{所以 } F_{32}(s) = F(s) - F_2(s)$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } D_{32}(s) &= \frac{F_{32}(s)}{P_3(s)} = \frac{F(s) - F_2(s)}{P_3(s)} \\ &= \frac{F(s)G_1(s) - P_2(s)}{P_3(s)G_1(s)} \end{aligned}$$

$$\text{同理可得 } D_{23}(s) = \frac{F(s)G_1(s) - P_3(s)}{P_2(s)G_1(s)}$$

传递函数 $D_{32}(s)$ 和 $D_{23}(s)$ 也是由系统的特性决定的，当套作玉米系统中各个分室的传递函数 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 及 $D_{32}(s)$ 、 $D_{23}(s)$ 求得以后，我们可以用下述两种方法求出两茬玉米实际接受的光辐射值。

记某个待计算的套作玉米系统二茬玉米的叶面积系数为 $\hat{p}_2(t)$ ，三茬玉米的为 $\hat{p}_3(t)$ ，即表示某个量的字母上面加一个“^”，以区别于建立系统时所用的符号。

第一种方法：首先测量待计算系统的叶面积系数曲线 $\hat{p}_2(t)$ 和 $\hat{p}_3(t)$ 。计算出 $\hat{P}_2(s)$ 和 $\hat{P}_3(s)$ ，利用 $\hat{F}_{32}(s) = \hat{P}_3(s) \cdot D_{32}(s)$ 及 $\hat{F}_{23}(s) = \hat{P}_2(s) \cdot D_{23}(s)$ 求得 $\hat{F}_{32}(s)$ 和 $\hat{F}_{23}(s)$ ，再对其进行拉普拉斯反变换便可得到：

$$\hat{f}_2(t) = \hat{f}(t) - \hat{f}_{32}(t) \text{ 及 } \hat{f}_3(t) = \hat{f}(t) - \hat{f}_{23}(t)。$$

第二种方法可以直接利用关系式

$$\begin{aligned} \hat{F}_2(s) &= \frac{\hat{P}_2(s)}{\hat{G}_1(s)} \\ &= \frac{a_0(\hat{p}_0 s^2 + \hat{p}_1 s + 2\hat{p}_2)}{s(\hat{p}_0 s^2 + \hat{p}_1 s + 2\hat{p}_2)} + \frac{\hat{p}_0 s^2 + \hat{p}_1 s + 2\hat{p}_2}{\hat{p}_0 s^2 + \hat{p}_1 s + 2\hat{p}_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n s + (n\omega)b_n}{(n\omega)^2 + s^2} \right) \end{aligned}$$

为求其拉普拉斯反变换, 利用部分分式展开法, 亦即令

$$\frac{\widehat{p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2} \cdot \widehat{a_n s + (n\omega) b_n}}{\widehat{p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2} \cdot (n\omega)^2 + s^2} = \frac{q_n s + r_n}{(n\omega)^2 + s^2} + \frac{u_n s + v_n}{p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

上式第一项的拉普拉斯反变换为 $q_n \cos n\omega t + r_n \sin n\omega t$ 第二项的分母, 因为 $\Delta = p_1 - 8p_0 p_2 > 0$ (根据我们的几种拟合曲线的数据得知), 所以

$$p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2 = p_0 (s + a)(s + b)$$

(a, b 为左式的两个根的负值), 故拉普拉斯反变换为如下形式

$$L^{-1} \left[\frac{s}{(s+a)(s+b)} \right] = \frac{1}{b-a} \left[b e^{-bt} - a e^{-at} \right],$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s+a)(s+b)} \right] = \frac{1}{b-a} \left[e^{-at} - e^{-bt} \right]$$

施行上述运算后, $\widehat{F_2}(t)$ 可以表达成一些初等函数之和, 很容易算得其结果, 基于上述两种方法, 只要测得 $\widehat{p_2}(t)$ 和 $\widehat{p_3}(t)$, 根据系统的传递函数就可以计算出各茬玉米实际接受的光辐射值, 而避免了对各茬作物的实际接受光辐射值的复杂的直接测量。而且通过对其实际接受光辐射曲线的分析, 可以为我们选择较好的套作方式提供理论上的依据。

六、套作玉米系统整体的传递函数

根据已求得的各分室的传递函数 $G_1(s), G_2(s), D_{32}(s), D_{23}(s)$, 可以求出整体的传递函数, 即由 $F(s) \rightarrow Y(s)$ 的传递。

$y(t)$ 表示单位面积上二茬及三茬作物的总平均干物质重量, 因为在单位面积上两茬作物占有的面积随套作方式的不同而不同, 例如 4.5 尺畦和 7.5 尺畦的套作玉米系统的二茬和三茬玉米各占有的面积显然是不同的, 所以设:

$$y(t) = k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t)$$

其中 $k_2 + k_3 = 1$, 进行拉普拉斯变换, 得到:

$$Y(s) = k_2 X_2(s) + k_3 X_3(s)$$

$$\text{而 } X_2(s) = P_2(s) G_2(s)$$

$$\text{及 } P_2(s) = F_2(s) G_1(s)$$

$$F_2(s) = F(s) - F_{32}(s) = F(s) - P_3(s) \cdot D_{32}(s),$$

同理可得 $P_3(s) = [F(s) - P_2(s) \cdot D_{23}(s)] \cdot G_1(s)$,

因此 $P_2(s) = [F(s) - P_3(s) \cdot D_{32}(s)] \cdot G_1(s)$, 将 $P_3(s)$ 代入 $P_2(s)$ 的上述表达式, 得

$$P_2(s) = \frac{F(s) \cdot G_1(s) \cdot [G_1(s) \cdot D_{32}(s) - 1]}{G_1^2(s) \cdot D_{23}(s) \cdot D_{32}(s) - 1}$$

同样可以得出

$$P_3(s) = \frac{F(s) \cdot G_1(s) [G_1(s) D_{23}(s) - 1]}{G_1^2(s) \cdot D_{32}(s) \cdot D_{23}(s) - 1}$$

因此

$$Y(s) = \frac{G_1(s)[k_2 D_{32}(s) + k_3 D_{23}(s)] - 1}{D_{32}(s) D_{23}(s) G_1^2(s) - 1} \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot F'(s)$$

整个套作系统的, 即从 $F'(s)$ 到 $Y(s)$ 的传递函数为

$$T'(s) = \frac{G_1(s)[k_2 D_{32}(s) + k_3 D_{23}(s)] - 1}{D_{32}(s) \cdot D_{23}(s) G_1^2(s) - 1} \cdot G_1(s) \cdot G_2(s)$$

七、结 论

1. 我们对四种不同的套作方式的玉米系统作了计算, 将表 1 和表 2 的数据分别代入 $T'(s)$ 中, 我们可以看到, 对于不同的套作方式, 系统的传递函数 $T'(s)$ 是不同的。但是其中的 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 对不同的套作玉米系统都是相同的, 它们的差别只反映在不同的套作系统的 $D_{32}(s)$ 和 $D_{23}(s)$ 的差异上。这是由于不同套作制的两茬作物间的争光特性不同所致, 这个结论与实际情况相符合。因此, 反映套作玉米系统的太阳辐射到干物重的转换的本质的是传递函数 $T'(s)$, 而各种不同的套作方式的差别则决定于 $D_{23}(s)$ 和 $D_{32}(s)$ 以及 k_2 和 k_3 , 这就为我们提供了一种选择最佳的套作方式的理论分析方法, 从而使实验设计避免了盲目性。

2. 如已知系统的输入函数 $\hat{f}(t)$, 采用富里叶变换, 然后对其进行拉普拉斯变换就得到 $\hat{F}(s)$, 利用 $\hat{Y}(s) = T'(s) \cdot \hat{F}(s)$ 求得 $\hat{Y}(s)$, 再对其进行拉普拉斯反变换, 便可得到 $\hat{y}(t)$ 。

因此, 可以根据不同年份光辐射输入值 $\hat{f}(t)$, 计算不同年份的产量。当然, 在更为理想的情况下, 即若能预报下一年的光辐射量, 我们就可以利用这个数学模型预报下一年的玉米产量。尽管目前我们还很难准确地达到这个程度, 但是至少可以对在不同地区若种植相同品种的玉米, 采用同样的套作系统而在相近的水、肥、温度等条件下, 我们就可以用这个数学模型, 根据当地的光辐射输入, 计算作物产量。

3. 我们可以从 $\hat{Y}(s) = T'(s) \hat{F}(s)$, 根据拉普拉斯变换的性质, 得到一个 $y(t)$ 的常系数微分方程。因此也可以利用常微分方程的理论与方法, 对套作玉米系统进行分析。

4. 本文所叙述的用系统理论建立套作玉米系统的数学模型的过程, 提供了一种用数学工具研究生态系统的方法。至于根据实际观测资料所做的数值计算, 不在这里赘述。

参 考 文 献

Faure, P., and M. Depeyrot 1977 Elements of system theory. North-Holland pub. Corp.

MATHEMATICAL MODEL OF CORN INTERPLANTING SYSTEM BY MEANS OF SYSTEM THEORY

Qi Wenhua Li Lixian Ni Jianhua

(The Commission for Integrated Survey of Natural Resources, Academia Sinica)

The application of interplanting in the agricultural production is of considerable significance in promoting the rate of utilization of the sunlight in a unit area and in further raising the yield in a unit area. The aim of this paper is to study the utilization of sunlight in the interplanting of corn and their relationship. We analyze firstly the composition of the corn interplanting system and their relationship,

assuming the process of the growth of corn as the process of the transformation of materials in a definite time, Whereas the solar radiation energy, the leaf area index, the dry weight of corn, as well as the decrease in receiving the sunlight of the 3rd(2nd) crop of corn by the 2nd(3rd) crop of corn are all quantities varying with time, and are hereby given as $f(t)$, $p(t)$ and $x(t)$ respectively. On the basis of the object of study and the growth of the crops, we assume the system to be linear, and time-invariant, and then simplify the system to adynamic system of feedback of single input and single output.

We determine first $f(t)$, $p(t)$ and $x(t)$, and then transform $f(t)$ into Fourier series and make Laplace transformation. Second, let $p(t)$ and $x(t)$ be polynomial functions based on the observation data and by means of multiple regression. We obtain the coefficients of the polynomials p_0 , p_1 , p_2 and v_0 , v_1 , v_2 , v_3 , and then make Laplace transformation.

Hence, the transfer function from $f(t)$ to $p(t)$ can be obtained,

$$G_1(s) = \frac{\frac{p_0}{s} + \frac{p_1}{s^2} + \frac{2p_2}{s^3}}{\frac{a_0}{s} + \sum_{n=1}^4 \frac{a_n s + b_n(n\omega)}{(n\omega)^2 + s^2}}$$

And the transfer function from $p(t)$ to $x(t)$,

$$G_2(s) = \frac{v_0 s^3 + v_1 s^2 + 2v_2 s + 6v_3}{s(p_0 s^2 + p_1 s + 2p_2)}$$

Hence the transfer function from the receiving of solar radiation of corn to dry material can be obtained,

$$G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s)$$

Furthermore, the transfer function that reflects the interdependence of the two crops of corn in receiving the sunlight is obtained as follows,

$$D_{32}(s) = \frac{F(s) \cdot G_1(s) - P_2(s)}{P_3(s) \cdot G_1(s)}$$

$$D_{23}(s) = \frac{F(s) \cdot G_1(s) - P_3(s)}{P_2(s) \cdot G_1(s)}$$

And hence the transfer function reflecting the interplanting system of corn as a whole is as follows,

$$T(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s) [k_2 D_{32}(s) + k_3 D_{23}(s)] - 1}{D_{23}(s) \cdot D_{32}(s) \cdot G_1^2(s) - 1} G_1(s) \cdot G_2(s)$$

As is shown from the above, it is the transfer function as a whole that reflects the properties of systems of different interplanting systems. The difference of various interplanting systems lies in $D_{32}(s)$ and $D_{23}(s)$.

Besides, given the input function $\hat{f}(t)$, after displaying it into Fourier series and making Laplace transformation, we obtain $\hat{F}(s)$, and then by formula, we get $\hat{Y}(s) = \hat{F}(s) \cdot G(s)$, and again by inverse Laplace transformation we get $\hat{y}(t) = L^{-1}[\hat{Y}(s)]$. Thus on the basis of different solar radiation input, the yield of interplanting of corn in different areas can be calculated.

What is more important is that, in terms of the mathematical model which we have established, as the difference of total yield $y(t)$ in different systems is determined by $D_{23}(s)$ and $D_{32}(s)$, the best interplanting system of corn can be obtained through analysis of $D_{23}(s)$ and $D_{32}(s)$.