第21卷第11期　　生 态 学 报　　Vol. 21, No. 11
2001年10月　　ACTA ECOLOGICA SINICA　　Nov., 2001

荔枝蝽-寄生蜂系统数量变动模型与应用

李时银，罗大民
（1. 厦门大学数学系　厦门　361005；2. 厦门大学生命科学学院　厦门　361005）

摘要：研究荔枝蝽-寄生蜂系统的数量变动规律，得到一个差分-积分方程组及求解的递推公式，指出了公式中参数的确定方法。推导出荔枝蝽-寄生蜂系统长期演变的特性，用模型证明了人工放蜂防治荔枝蝽的优越性及滥用农药的不良后果，给出了人工放蜂的最佳次数、最佳时刻及合适的放蜂量的计算公式，导出的结论与实验结果相符。

关键词：荔枝蝽-寄生蜂系统；递推公式；释放时刻与释放数量

Dynamics model in the system of *Tessaratoma papillosa*-parasitoid wasp and its application

LI Shi-Yin[1], LUO Da-Min[2] (1. *Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China*; 2. *Department of Biology, School of Life Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China*). ***Acta Ecologica Sinica*, 2001, 21(11): 1839～1846.**

Abstract: It is well known that *Anastatus* sp. and *Ooencyrtus* sp. are effective in killing *Tessaratoma papillosa*. So it is important to investigate the population dynamics in parasitoid wasp-*Tessaratoma papillosa* system and to develop strategy of releasing of artificially-reared parasitoid to the field. It is a common method to predicate the current pest quantity by its last generation dynamics combining with the analysis of environment factors. Different generations of *Tessaratoma papillosas* can be easily distinguished but that of parasitoid wasps would not be done. In fact, it is quite difficult to check which generations the parasitoid wasps should belong to. Thus we could not describe exactly the population of parasitoid wasp-*Tessaratoma papillosa* by only differential or difference equations. A coupled equations consisting of both differential equation and difference equation modeling *Tessaratoma papillosa*-parasitoid wasp interaction is necessary. A difference-integral equation model for *Tessaratoma papillosa*-parasitoid wasp system using the Lotka-Volterra equation and a recurrence formula for solving the equation are presented in this paper.

We modelled the population dynamics with the following coupled equations. Let $X_i(t)$ denote the egg number of new generation of *Tessaratoma papillosa* at time t of the i'th year in a certain space $(0\leqslant t\leqslant T)$, $i=1, 2, 3\cdots$. The function $X_1(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ can be obtained by fitting actual data. Using $Y_1(t)$ to figure the amount of parasitoid wasps at time t $(0\leqslant t\leqslant T)$ of the i'th year $(i=1, 2, \cdots)$ within the same space. Suppose $Y_i(0)$ is the number of parasitoid at time 0 of the i'th year. According to the Lotka-Volterra equation, we have

$$\frac{dY_1(t)}{dt}=Y_1(t)[-\alpha+\beta X_1(t)]\qquad(0\leqslant t\leqslant T)$$

where both α and β are two positive constants. Since $X_1(t)$ and $Y_1(0)$ are known, we have

$$Y_1(t)=Y_1(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_1(\sigma)]d\sigma},(0\leqslant t\leqslant T)$$

Let k be the average parasitism rate per parasitoid. We use

收稿日期：1999-12-21；**修订日期**：2000-03-18

作者简介：李时银（1956～），男，湖北荆州市人，博士。主要从事生物数学与金融数学的研究。

$$\tilde{X}_1(t) = X_1(t) - kY_1 = X_1(t) - kY_1(o)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_1(\sigma)]d\sigma}$$

to denote the amount of pest eggs which are not parasitoid in the first year and suppose they can all grow up and lay eggs, where λ serve as the average ovipositor quantity per adult pest. Thus we have:

$$X_2(t) = \lambda\tilde{X}_1(t) = \lambda[X_1(t) - kY_1(t)] = \lambda X_1(t) - \lambda kY_1(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_1(\sigma)]d\sigma}$$

Inductively, we obtain the following model:

$$\begin{cases} X_n(t) = \lambda[X_{n-1}(t) - kY_{n-1}(t)] \\ Y_n(t) = Y_1(o)\left\{\prod_{i=1}^{n-1} e^{\int_0^T[-\alpha+\beta X_i(\sigma)]d\sigma}\right\} e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma} \end{cases} \quad (1)$$

Using the integral-difference equations above, we can predicate the number of the pest eggs and parasitoid at time t of each year by means of recurrence.

The parameter κ, denoting the average number of porositics eggs per parasitoid, is transformed from mean ovipositor number per parasitoid combined with parasitism rates, and λ, denoting the average fecundity value per pest, which can be determined from laboratory rearing experiment respectively. Parameter α and β are confirmed based on model (1), one can obtain.

$$\ln(y_n(0)/y_{n-1}(0)) = -\alpha T + \beta\int_0^T x_{n-1}(\sigma)d\sigma \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

where $\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ is the ovipositor amount of the pest during the n'th year.

When the amount of pest ovipositor in the i'th year and the amount of parasitoid wasps at time 0 in the corresponding year, namely $\int_0^T X_i(\sigma)d\sigma$ and $Y_i(0)$, $(i=1,2,\cdots m)$ are known, we can obtain the parameters of α and β by linear regression.

Long-term dynamic characterization of the system is deduced base on the model.

In Model (1), assume $t=T$. Then it follows:

$$\begin{cases} X_n(T) = \lambda[X_{n-1}(T) - kY_{n-1}(T)] \\ Y_n(T) = Y_1(O)\prod_{i=1}^{n} e^{\int_0^T[-\alpha+\beta X_i(\sigma)]d\sigma} \end{cases} \quad (2)$$

when $n\to\infty$, $Y_n(t)$ becomes a infinite product. We get the following results by using the infinite product theory:

Proposition 1 The prerequisite of parasitoid wasp amount $Y_n(T)$ is α/β, where α and β are determinated by the following equations

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma = 0 \text{ or equivalently } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$$

Proposition 2 If the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ is convergent, then both *Tessaratoma papillosa* and parasitoid wasp tend to extinction.

Proposition 3 If $\lim_{n\to\infty}Y_n(t) = A$, then $A = \frac{\alpha}{k\beta}(1-\frac{1}{\lambda})$

Proposition 4 *Tessaratoma papillosa*-parasitoids wasp system possibly exists for a long-term only if

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^T[-\alpha+\beta x_n(\sigma)]d\sigma = 0$

and

(2) Sequence $\{\int_0^T[-\alpha+\beta x_n(\sigma)]d\sigma\}$ fluctuates continually around zero, namely the average amount of the pest, $\frac{1}{T}\int_0^T x_n(\sigma)d\sigma$ fluctuates around α/β. Actually, equality (1) in Proposition 4 is rare because of bi-

otic and other factors.

Population dynamics under the condition of release of parasitoids and sparing pesticide is deduced respectively based on our model, by which we proof the theory that to release reared parasitoid is much better than to spare overflow pesticide. Furthermore, we deduce the optimal release time and the optimal release quantity of reared parasitoid. Our model and results agreed with the data of a 12 year period that was obtained by a pest prediction station in Tongan, Xiamen.

Key words: *Tessaratoma papillosa*; parasitoid wasp; recurrence formula; releasing strategy

文章编号:1000-0933(2001)11-1839-08　**中图分类号**:Q18,Q958.9,S436.6　**文献标识码**:A

荔枝蝽是荔枝、龙眼、柑桔的主要害虫之一。荔枝蝽一年发生一代,完成一代平均历时367d,以成虫越冬,新成虫当年不交尾产卵,于明年2~3月份开始产卵,4月份为产卵盛期,8月份仍可在果树上见到卵块,成虫产完卵后不久死去[1]。对荔枝蝽这类发育历期长,世代明显,同一世代中个体发育又很不一致的昆虫,其数量动态用微分方程或差分方程来描述都不合适[2]。利用函数拟合田间观测数据,可以得到各个世代的昆虫数量消长曲线。利用前一世代昆虫的消长曲线,结合对环境因素、天敌、人工治理等因素的分析,预测后一世代昆虫数量的变化情况是目前害虫预测预报中普遍采用的方法[3]。文[4~7]对此方法作过一些较深入的研究。

在自然环境中,荔枝蝽的发生受多种因素所控制,但以各种卵寄生蜂(平腹小蜂、跳小蜂等)的控制作用最为显著。荔枝蝽卵的自然寄生率在5月中旬可高达80%以上,在人工放蜂情况下寄生率可高达97%以上,此时生物防治的效果大大优于化学防治的效果[1]。但寄生蜂的数量随荔枝蝽卵量的消长而波动,调查表明在自然环境中3月底4月初荔枝蝽卵的寄生率仅为10%左右,难以控制荔枝蝽的危害,因此有必要研究荔枝蝽-寄生蜂系统种群变动的规律及控制方法。

以平腹小蜂、跳小蜂为主的荔枝蝽卵寄生蜂具有生命期短,一年发生多代(平腹小蜂一年发生8代,跳小蜂一年发生10代左右)且世代重迭(不同的寄生蜂的世代又相互重迭)的特点,故其种群(多种寄生蜂组成的复合种群)的数量动态可用微分方程来描述[2]。

研究寄生与被寄生种群系统的数量动态,生态数学工作者大多从著名的Lotka-Volterra方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(r - \delta y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-\alpha + \beta x) \end{cases} \quad (\alpha、\beta、r、\delta \text{为正常数})$$

出发进行讨论。但此模型假设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 对应的二种群的繁殖是连续的,二种群的动态均可以用微分方程来描述。对荔枝蝽-寄生蜂种群系统而言,由于需要将描述荔枝蝽数量动态的分世代数量消长曲线模型与描述寄生蜂数量动态的微分方程模型结合在一起,故要对Lotka-Volterra方程作合理的改变。

1　建模

荔枝蝽一年一代,今年的荔枝蝽卵是去年出现的荔枝蝽卵经过一年的发育,成熟交尾后产下的。用 $X_i(t)$ 表示某空间范围内第 i 年 t 时刻新出现的荔枝蝽的卵量(或密度,以下相同,不再说明),$(0 \leqslant t \leqslant T)$,这里 T 为1a的时间长度,而 $i = 1,2,3\cdots$,假设函数 $X_1(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 已由田间观测数据作函数拟合给出。用 $Y_i(t)$ 表示该空间范围内第 i 年 t 时刻 $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 的荔枝蝽寄生蜂的数量 $(i = 1,2,\cdots)$,$Y_i(0)$ 是第 i 年 $t=0$ 时刻寄生蜂的数量,设 $Y_1(0)$ 已由调查得到。

根据Lotka-Volterra方程,有

$$\frac{dY_1(t)}{dt} = Y_1(t)[-\alpha + \beta X_1(t)]$$

$(0 \leqslant t \leqslant T)$,其中 α 与 β 是两个正常数。

由于 $X_1(t)$,$Y_1(0)$ 已知,故有

$$Y_1(t) = Y_1(0)e^{\int_0^t [-\alpha + \beta X_1(\sigma)] d\sigma},(0 \leqslant t \leqslant T)$$

用 k 表示每只寄生蜂平均寄生(并致死)的荔枝蝽卵量,则

$$\tilde{X}_1(t) = X_1(t) - kY_1 = X_1(t) - kY_1(o)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_1(\sigma)]d\sigma}$$

表示第1年荔枝蝽卵中未被寄生的数量。假设数量为 $\tilde{X}_1(t)$ 的卵均能成长为荔枝蝽成虫(忽略其它原因致死的卵量或将其合并于被寄生的卵量中),经过1a的发育后它们开始产卵,用 λ 表示每只荔枝蝽成虫的平均产卵量,则有

$$X_2(t) = \lambda\tilde{X}_1(t) = \lambda[X_1(t) - kY_1(t)]$$
$$= \lambda X_1(t) - \lambda kY_1(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_1(\sigma)]d\sigma} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

照此推理,可以得到:

$$\begin{cases} X_n(t) = \lambda[X_{n-1}(t) - kY_{n-1}(t)] \\ Y_n(t) = Y_1(o)\left\{\prod_{i=1}^{n-1} e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_i(\sigma)]d\sigma}\right\} e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma} \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

利用上面的积分差分方程,可以逐年递推计算出各年度荔枝蝽卵量分布在时间 t 的数量及寄生蜂在 t 时刻的数量。

2 模型中参数的确定方法

模型中共有4个参数 α,β,k,λ。其中 k 是每只寄生蜂平均寄生(致死)的荔枝蝽卵的粒数,可以根据每只寄生蜂的平均产卵量结合寄生致死率折算出来(平腹小蜂平均每雌产卵量为228粒[1]);λ 是每只荔枝蝽成虫的平均产卵量,故 λ 可用饲养实验的方法得到(荔枝蝽每雌平均产卵量为70粒[1])。为了确定 α 与 β,从所建模型(1)可得:

$$Y_1(T) = Y_2(o) = Y_1(o)e^{-\alpha T} \cdot e^{\beta\int_0^T x_1(\sigma)d\sigma}$$

$$\ln\frac{Y_2(o)}{y_1(o)} = -\alpha T + \beta\int_0^T x_1(\sigma)d\sigma$$

同理有:

$$\ln\frac{Y_n(o)}{Y_{n-1}(o)} = -\alpha T + \beta\int_0^T x_{n-1}(\sigma)d\sigma$$
$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

其中 $\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ 是第 n 年产下的荔枝蝽卵量的累积值。

假如我们作了若干年的系统观测,得到荔枝蝽产卵量的数据及相应年份 $t=0$ 时刻寄生蜂数量的调查数据,即已知:

$$\int_0^T X_i(\sigma)d\sigma \quad 及 \quad Y_i(0),(i = 1,2,\cdots,m)$$

则用线性回归方法可以得到参数 α 与 β 的值。

3 荔枝蝽-寄生蜂系统演变规律初探

在模型(1)中取 $t=T$ 得:

$$\begin{cases} X_n(T) = \lambda[X_{n-1}(T) - kY_{n-1}(T)] \\ Y_n(T) = Y_1(O)\prod_{i=1}^{n} e^{\int_0^T[-\alpha+\beta X_i(\sigma)]d\sigma} \end{cases} \tag{2}$$

当 $n\to\infty$ 时,$\lim_{n\to\infty}Y_n(T)$ 是一个无穷乘积。利用无穷乘积的数学理论,可得:

命题1 当 $n\to\infty$ 时,寄生蜂的数量 $Y_n(T)$ 趋于某常数的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma = 0 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$$

证明:设 $A>0$ 为某常数,$\lim_{n\to\infty}Y_n(T)=A$ 等价于

$$\ln Y_1(\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma = \ln A$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma$ 收敛，由无穷级数收敛的必要条件得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma = 0$$

此即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$$

命题 2　若无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ 收敛，则荔枝蝽与寄生蜂均趋于灭绝。

证明：若，$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma < +\infty$　则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma = -\infty$$

从而 $\lim_{n\to\infty}Y_n(T)=0$，即寄生蜂趋于灭绝。此时显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma = 0$$

因 $X_n(\sigma)\geqslant 0$，故必有，$\lim_{n\to\infty}X_n(t)=0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 故荔枝蝽也趋于灭绝。

命题 3　若，$\lim_{n\to\infty}Y_n(t)=A$，则 $A=\frac{\alpha}{k\beta}(1-\frac{1}{\lambda})$

证明：当 $\lim_{n\to\infty}y_n(t)=A$ 时，由无穷乘积收敛的条件推出 $\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma) \to \frac{\alpha}{\beta}$（当 $n\to\infty$），在关系式

$$X_n(t)=\lambda X_{n-1}(t)-\lambda k Y_{n-1}(t)$$

两边积分得：

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma = \frac{\lambda}{T}\int_0^T X_{n-1}(\sigma)d\sigma - \frac{\lambda k}{T}\int_0^T Y_{n-1}(\sigma)d\sigma$$

两边求极限得：

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda\alpha}{\beta} - \lambda k A$$

从而 $A=\frac{\alpha}{k\beta}(1-\frac{1}{\lambda})$

从模型(2)还可以看出：若存在某个正整数 n_0 及某个正数 $\delta>0$，使得：

$$\inf_{n\geqslant n_0}\left\{\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma\right\}\geqslant\delta$$

则 $\lim_{n\to\infty}Y_n(T)=\infty$

若 $\sup_{n\geqslant n_0}\left\{\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma\right\}\leqslant -\delta$

则 $\lim_{n\to\infty}Y_n(T)=0$

其中 inf 与 sup 表示下确界与上确界。

由模型(1)的表达式不难看出以上两种情况均为荔枝蝽-寄生蜂系统趋于灭绝的情况，因此得到：

命题 4　荔枝蝽-寄生蜂系统只可能在如下两种情况下长期存在：

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^T[-\alpha + \beta x_n(\sigma)]d\sigma = 0$

(2) 数列 $\left\{\int_0^T[-\alpha + \beta X_n(\sigma)]d\sigma\right\}$ 在 0 周围频繁地摆动，即 $\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ 在 $\frac{\alpha}{\beta}$ 周围摆动。

实际中的寄生蜂与荔枝蝽的数量还受到气候、食物、人工治理等因素的影响，因此命题 4 中情况(1)较难出现，故可以预言，荔枝蝽数量的平均值 $\frac{1}{T}\int_0^T X_n(\sigma)d\sigma$ 将频繁地摆动于值 $\frac{\alpha}{\beta}$ 周围。

4　人工放蜂与喷洒农药情况下的系统动态

在生产实际中已采用人工饲养平腹小蜂在果园分若干次释放，达到控制荔枝蝽危害的目的[1]。假设分

m 次释放人工饲养的寄生蜂，在 t_i 时刻释放 $y(t_i)$ 只寄生蜂（$1\leqslant i\leqslant m$）且 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m\leqslant T$，则当 $0\leqslant t<t_1$ 时，第 n 年荔枝蝽卵的残存量 $\tilde{X}_n(t)$ 为：

$$\tilde{X}_n(t)=X_n(t)-kY_n(o)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

当 $t_1\leqslant t<t_2$ 时

$$\tilde{X}_n(t)=X_n(t)-k\{Y_n(o)e^{\int_0^{t_1}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}+y(t_1)\}e^{\int_{t_1}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

$$=X_n(t)-kY_n(o)e\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma-ky(t_1)e^{\int_{t_1}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

照此推理，当 $t_m\leqslant t\leqslant T$ 时

$$\tilde{X}_n(t)=X_n(t)-kY_n(o)e^{\int_{t_1}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

$$-ky(t_1)e^{\int_{t_1}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

$$\cdots$$

$$-ky(t_m)e^{\int_{t_m}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$$

可以看出人工放蜂能将荔枝蝽的数量控制在所允许的范围内。

若采用滥施农药的方法防治荔枝蝽，为讨论简洁起见假设在 $0\leqslant t\leqslant T$ 内一直保持一定的农药量（实际情况是多次打药），使得荔枝蝽的死亡率为 θ_1 而寄生蜂的死亡率为 θ_2（$0<\theta_i<1, i=1,2$），则模型中 $x_n(t)$ 变为：

$(1-\theta_1)X_n(t)$，$Y_n(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}$ 变为 $(1-\theta_2)Y_n(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta(1-\theta_1)X_n(\sigma)]d\sigma}$ 在此种打药方式下，荔枝蝽的残存量为：

$$\tilde{X}_n(t)=(1-\theta_1)X_n(t)-k(1-\theta_2)Y_n(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta(1-\theta_1)X_n(\sigma)]d\sigma}$$

$$=(1-\theta_1)X_n(t)-k(1-\theta_2)Y_n(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot e^{-\int_0^t\beta\theta_1X_n(\sigma)d\sigma}$$

可见当荔枝蝽卵量以等差级数形式减少时，寄生蜂以超等比级数的形式减少，即使所施用的农药对寄生蜂无毒杀作用，寄生蜂的数量也将以等比级数形式减少，从而出现荔枝蝽的残存量 $\tilde{X}_n(t)$ 并不减少的现象，滥用农药导致害虫猖獗的现象在此得到了很好的解释。

5 最佳的放蜂次数，放蜂时刻与合适的放蜂量

为了进行人工放蜂防治荔枝蝽的经济效益分析，现计算一年内荔枝蝽危害造成的损失与养蜂放蜂的费用之和，用 L 表示这两笔损失的和，则

$$L=\mu\int_0^T\tilde{X}_n(t)dt+c_0+c_1(y_1+y_2+\cdots+y_m)$$

其中 μ 表示每只荔枝蝽单位时间内造成的损失，c_0 是一笔固定费用（用于建养蜂房，购买设备等），c_1 是每多养一单位数量的寄生蜂所需的追加费用。

将残存量 $\tilde{X}_n(t)$ 的表达式代入后得到

$$L=c_0+\mu k\int_0^T X_n(t)dt-\mu kY_n(0)\int_0^T e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot dt$$

$$+y_1(c_1-\mu k\int_{t_1}^T e^{\int_{t_1}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot dt)+\cdots$$

$$+y_m(c_1-\mu k\int_{t_m}^T e^{\int_{t_m}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot dt)$$

故总费用 L 是放蜂次数 m，放蜂时刻 t_i 与放蜂量 y_i（$1\leqslant i\leqslant m$）的函数。

为使放蜂后 L 达到最小，必要条件是：

$$c_1-\mu k\int_{t_i}^T e^{\int_{t_i}^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot dt\leqslant 0$$

否则，应取 $y_i=0$，即在 t_i 时刻不放蜂（$1\leqslant i\leqslant m$）。上面不等式可转化为

$$\int_{t_i}^{T} e^{\int_{t_i}^{t}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma}\cdot dt \geqslant \frac{c_1}{\mu k}-\int_{t_i}^{T}\frac{c_1\cdot dt}{\mu k(T-t_i)}$$

故有 $e^{\int_{t_i}^{t}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma} \geqslant \frac{c_1}{\mu k(T-t_i)}$，$(t_i\leqslant t\leqslant T)$

即

$$\int_{t_i}^{t}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma+\ln(T-t_i)\geqslant \ln\frac{c_1}{\mu k} \quad (3)$$

$$(t_i\leqslant t\leqslant T)$$

当不等式(3)成立时应选择放蜂，此时最佳的放蜂时刻 t_i^* 应是下面函数

$$F(t_i)\triangleq\int_{t_i}^{T}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)]d\sigma+\ln(T-t_i)$$

$(t_i\leqslant t\leqslant T)$ 的最大值点。

因

$$\frac{d}{dt_i}F(t_i)=\alpha-\beta X_n(t_i)-\frac{1}{T-t_i},\ \frac{d^2}{d^2t_i}F(t_i)=-\beta X_n'(t_i)+\frac{1}{(T-t_i)^2}$$

故当 t_i^* 使得 $\alpha-\beta X_n(t_i^*)=\frac{1}{T-t_i^*}$，且 $X_n'(t_i^*)>\frac{1}{\beta(T-t_i^*)^2}$ 时，t_i^* 是最佳的放蜂时刻。

在实际中荔枝蝽的发生高峰在春季和夏季，故 $T-t_i^*$ 很大，$(T-t_i^*)^{-1}\approx 0$，$(T-t_i^*)^{-2}\approx 0$，故可由 $\begin{cases}X_n(t_i^*)=\frac{\alpha}{\beta}\\ X_n'(t_i^*)>0\end{cases}$ 近似地给出 t_i^*。调查表明多数年份荔枝蝽卵量函数 $X_n(t)$ 为开口向下的单峰函数[1,3,①]，从而由上面结果得知最佳的放蜂次数为一次，放蜂时刻应为 $f(t)\triangleq-\alpha+\beta X_n(t)=0$ 的两根中较小的那个根，这里的讨论为实际工作者提供了一个简便的确定合适的放蜂时刻的方法。

用上面的方法不难给出当 $X_n(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ 有多个峰时，最佳的放蜂次数与放蜂时刻。

为确定适宜的放蜂数量，注意到总费用 L 是 y_i 的单调减函数但必须有 $L\geqslant 0$，故最大放蜂量 y_i^* 可由 $L=0$ 确定。考虑只须放蜂一次的情况时令

$$L=C_0+\mu\int_0^T X_n(t)dt-\mu kY_n(0)\int_0^T e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)d\sigma]}\cdot dt$$

$$+y_1^*(C_1-\mu k\int_{t_1^*}^{T}e^{\int_{t_1^*}^{t}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)d\sigma]}\cdot dt)=0$$

得

$$y_1^*=\frac{C_0+\mu\int_0^T\{X_n(t)-kY_n(0)e^{\int_0^t[-\alpha+\beta X_n(\sigma)d\sigma]}\}dt}{\mu\left\{k\int_{t_1^*}^{T}e^{\int_{t_1^*}^{t}[-\alpha+\beta X_n(\sigma)d\sigma]}\cdot dt-C_1\right\}}$$

其中的 t_1^* 是最佳放蜂时刻。

6 实际检验

荔枝蝽发生的调查数据和防治荔枝蝽的实践结果强有力地支持了本文的结论。下表给出了福建厦门市同安区病虫测报站连续 12a 的荔枝蝽发生量调查数据(表 1)

表 1　荔树蝽发生量数据

Table 1　The data of *Tessaratoma papillosa* Drury's quantity

调查时间	1985-04-24	1986-04-17	1987-04-04	1988-04-08	1989-04-02	1990-03-29
龙眼树百穗虫量	39.3	16.1	31.3	2	27	3.3
调查时间	1991-04-24	1992-04-36	1993-04-15	1994-04-20	1995-04-18	1996-04-18
龙眼树百穗虫量	13.425	11.1	4.9	2.6	4	13.0

① 福建农业大学生防所．应用平腹小蜂防治荔枝蝽情况总结．1990.

表1反映的曾令人困惑的波动与本文的结论相符。在人工释放平腹小腹防治荔枝蝽方面，福建省从1989年起在莆田市、漳州市等十几个县市进行了大面积的实践．采取4月中旬一次性放蜂，每株树视树冠大小放蜂500～1000只，至5月初荔枝蝽卵的寄生率全部在80%以上，至5月中旬以后荔枝蝽卵的寄生率全部在91.71%以上。厦门市同安区于1991年作了放蜂2次的试验，于3月31日和4月13日各放蜂1次，每株树放蜂1000～1200只，至4月24日，荔枝蝽卵的寄生率为87.97%，5月18日寄生率达到93.37%．试验结果表明，在合适的时候一次性放蜂并采用合适的放蜂量可以达到理想的防治效果并节省开支，这也与本文的理论分析相符．

本文采用的荔枝蝽卵量函数$x_1(t)$是用前一世代实际发生量的拟合函数结合历期推算法给出的。当考虑气候等因素的随机干扰时，可参照文献[10,11]将本文的模型改进为随机微分方程模型。

参考文献

[1] 潘蛰龙，黄明度．利用平腹小蜂防治荔枝蝽象．中国生物防治的进展．北京：农业出版社，1984.

[2] 丁岩钦．昆虫数学生态学．北京：科学出版社，1994.

[3] 南京农学院主编．昆虫生态及预测预报．北京：农业出版社，1985.

[4] 李时银．农业害虫复合种群的时间分布及其应用．中国科学技术文库．见：周光召、朱光亚主编．S0979，北京：科学技术文献出版社，1998.

[5] 李时银．害虫危害期与作物受害期的吻合度及其应用．华中农业大学学报，1995，(2)：142～145.

[6] 李时银．农业害虫数量时间分布的动态分析．华中农业大学学报，1997，(4)：351～356.

[7] 李时银．世代明显的昆虫种群的动态模型及其应用，CSIAM第5届年会论文集(4-4)，北京：清华大学出版社，1998.

[8] 李时银．一个确定害虫天敌最佳饲料数量的数学方法．生物数学学报，**14**(2)：192～196.

[9] 李时银，带时变增长率、迁移率、波动率的种群变动模型与生物防治最小成本的确定方法．数学的实践与认识，1999，(4)：1～6.

[10] Murray J D，Mathematical Biology，Springer-Verlay，Berlin Heidelberg，1993.

[11] Wilmott P. Derivatives the theory and practice of financial engineering，John Wiley and Sons Ltd，Newyork，USA，1998.